

Baccalauréat général — Session 2026

Corrigé détaillé

Mathématiques — Épreuve d'enseignement de spécialité

Centres étrangers — Jour 1 — mercredi 10 juin 2026

Code du sujet officiel : 26-MATJ1G11

Objectif du document

Corrigé rédigé question par question : chaque réponse rappelle la formule ou le théorème du cours utilisé (encadrés **Référence cours**), détaille les calculs étape par étape et encadre le résultat final. Les erreurs fréquentes sont signalées dans les encadrés **Point de vigilance**.

Durée de l'épreuve : 4 heures. Calculatrice en mode examen autorisée. Quatre exercices indépendants.

Exercice	Thèmes abordés	Points
1	Probabilités : arbre à trois branches, probabilités totales, loi binomiale, moyenne d'échantillon, Bienaymé-Tchebychev	5
2	Vrai/faux : équation différentielle, étude de fonction, limites de suites, récurrence, série géométrique	5
3	Géométrie dans l'espace (cube) : produit scalaire, angle, plan, projeté orthogonal, droites coplanaires	4
4	Fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$: limites, variations, convexité, intégrale, Python, intégration par parties	6

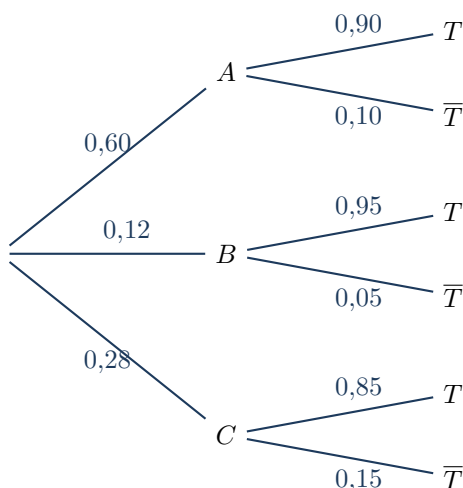
Table des matières

1 Exercice 1 — Lames d’escrime (5 points)	3
1.1 Partie A — Arbre et probabilités totales	3
1.2 Partie B — Loi binomiale	4
1.3 Partie C — Moyenne de n échantillons	5
2 Exercice 2 — Vrai ou faux (5 points)	6
2.1 Affirmation 1 — Équation différentielle	6
2.2 Affirmation 2 — Intersection de $y = 2x$ et $y = \sin x$	6
2.3 Affirmation 3 — La suite $v_n = \frac{2n + \sin n}{n + 1}$	6
2.4 Affirmation 4 — $u_n = n^2$	7
2.5 Affirmation 5 — Somme géométrique	7
3 Exercice 3 — Géométrie dans le cube (4 points)	7
4 Exercice 4 — Étude de $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ (6 points)	10
4.1 Partie A — Étude de la fonction	10
4.2 Partie B — La suite $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$	12

1 Exercice 1 — Lames d'escrime (5 points)

1.1 Partie A — Arbre et probabilités totales

1. Le stock comprend 60 % de lames A , 12 % de lames B , donc $100 - 60 - 12 = 28$ % de lames C . Sur chaque branche secondaire, on écrit la probabilité conditionnelle d'être conforme, puis son complément à 1.



Point de vigilance

La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut toujours 1 : $0,60 + 0,12 + 0,28 = 1$ et $0,90 + 0,10 = 1$, etc.

2.

Référence cours : probabilité d'une intersection

$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T)$: on multiplie les probabilités le long du chemin de l'arbre.

$$P(A \cap T) = 0,60 \times 0,90 = 0,54.$$

Résultat

$P(A \cap T) = 0,54$: 54 % des lames vendues proviennent du fournisseur A et sont conformes.

3.

Référence cours : formule des probabilités totales

Si A , B , C forment une partition de l'univers (événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'univers) :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T).$$

$$P(T) = 0,54 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85 = 0,54 + 0,114 + 0,238 = 0,892.$$

Résultat

$P(T) = 0,892$.

4.

Référence cours : probabilité conditionnelle « inversée »

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}, \text{ avec } P(\overline{T}) = 1 - P(T).$$

$P(\overline{T}) = 1 - 0,892 = 0,108$ et $P(B \cap \overline{T}) = 0,12 \times 0,05 = 0,006$, donc

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{0,006}{0,108} = \frac{1}{18} \approx 0,0556.$$

Résultat

Sachant que la lame n'est pas conforme, la probabilité qu'elle vienne de B est $\boxed{\approx 0,056}$.

1.2 Partie B — Loi binomiale

Référence cours : loi binomiale

On répète n fois de manière indépendante une épreuve à deux issues (succès de probabilité p).
Le nombre X de succès suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p).$$

1. On choisit 75 lames de façon indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) ; le « succès » est « la lame n'est pas conforme », de probabilité 0,108.

Résultat

X suit la loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 75}$ et $\boxed{p = 0,108}$.

2.

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} \times 0,108^6 \times 0,892^{69} \approx 0,120.$$

À la calculatrice

TI : `binomFdp(75,0.108,6)` — Casio : `BinomialPD(6,75,0.108)`.

Résultat

$$\boxed{P(X = 6) \approx 0,120}.$$

3. « Strictement plus de 8 lames » correspond à $X > 8$, c'est-à-dire $X \geq 9$:

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0,578 = 0,422.$$

À la calculatrice

TI : `1-binomFRép(75,0.108,8)` — Casio : `1-BinomialCD(8,75,0.108)`.

Résultat

$P(X > 8) \approx 0,422 < 0,5$: l'équipementier a raison.

Point de vigilance

L'événement contraire de $X > 8$ est $X \leq 8$ (et non $X \leq 9$ ou $X < 8$). C'est l'erreur la plus fréquente sur ce type de question.

1.3 Partie C — Moyenne de n échantillons**Référence cours : espérance et variance d'une moyenne**

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X , et $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$:

$$E(M_n) = E(X), \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}.$$

(Linéarité de l'espérance ; pour la variance, $V(aY) = a^2V(Y)$ et la variance d'une somme de variables **indépendantes** est la somme des variances.)

1. $E(X) = 75 \times 0,108 = 8,1$ et $V(X) = 75 \times 0,108 \times 0,892 = 7,2252$.

Résultat

$$E(M_n) = 8,1 \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{7,2252}{n}.$$

- 2.

Référence cours : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour toute variable aléatoire Y d'espérance μ , de variance V , et tout $\delta > 0$: $P(|Y - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

On applique l'inégalité à M_n avec $\mu = 8,1$ et $\delta = 2$:

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{V(M_n)}{2^2} = \frac{7,2252}{4n} = \frac{1,8063}{n}.$$

Résultat

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \quad P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}.$$

3. Les événements $|M_n - 8,1| < 2$ et $|M_n - 8,1| \geq 2$ sont contraires, donc

$$P(|M_n - 8,1| < 2) = 1 - P(|M_n - 8,1| \geq 2) \geq 1 - \frac{1,8063}{n}.$$

Il suffit donc que $1 - \frac{1,8063}{n} \geq 0,95$, c'est-à-dire $\frac{1,8063}{n} \leq 0,05$, soit $n \geq \frac{1,8063}{0,05} = 36,126$.

Résultat

À partir de $n = 37$ compétitions, $P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95$.

Interprétation : sur au moins 37 compétitions, la probabilité que le nombre moyen de lames non conformes par échantillon soit strictement compris entre 6,1 et 10,1 est d'au moins 95 %.

2 Exercice 2 — Vrai ou faux (5 points)**2.1 Affirmation 1 — Équation différentielle****Référence cours : vérifier qu'une fonction est solution**

f est solution de $(E) : y' + y = 2 \cos x$ si, pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = 2 \cos x$.

Dérivées : $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

$f(x) = 4e^{-x} + \cos x + \sin x$, donc $f'(x) = -4e^{-x} - \sin x + \cos x$ et

$$f'(x) + f(x) = -4e^{-x} - \sin x + \cos x + 4e^{-x} + \cos x + \sin x = 2 \cos x.$$

Réponse : Affirmation 1 vraie.

2.2 Affirmation 2 — Intersection de $y = 2x$ et $y = \sin x$ **Méthode**

Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $f(x) = g(x)$. On étudie la fonction différence $h(x) = 2x - \sin x$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 2 - \cos x$. Comme $\cos x \leq 1$, on a $h'(x) \geq 1 > 0$: h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = 0 - \sin 0 = 0$.

Une fonction strictement croissante s'annule au plus une fois ; elle s'annule en 0, donc **uniquement** en 0.

Réponse : Affirmation 2 vraie : le seul point d'intersection est l'origine $O(0;0)$.

2.3 Affirmation 3 — La suite $v_n = \frac{2n + \sin n}{n + 1}$ **Référence cours : limites et termes bornés**

Si (w_n) est bornée, alors $\frac{w_n}{n} \rightarrow 0$ (théorème des gendarmes : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$).

Pour $n \geq 1$, on factorise par n :

$$v_n = \frac{n \left(2 + \frac{\sin n}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{2 + \frac{\sin n}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Comme $-1 \leq \sin n \leq 1$, on a $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$, et par le théorème des gendarmes $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$. Donc $v_n \rightarrow \frac{2+0}{1+0} = 2$.

Réponse : Affirmation 3 fausse : la suite (v_n) converge vers 2.

2.4 Affirmation 4 — $u_n = n^2$

Raisonnement par récurrence sur $P(n)$: « $u_n = n^2$ », pour $n \geq 1$.

- **Initialisation** : $u_1 = 1 = 1^2$, donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : si $u_n = n^2$, alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (identité remarquable).
Donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : pour tout $n \geq 1$, $u_n = n^2$.

Réponse : Affirmation 4 vraie.

2.5 Affirmation 5 — Somme géométrique

Référence cours : somme des termes d'une suite géométrique

Pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Si $0 < q < 1$, $q^{n+1} \rightarrow 0$.

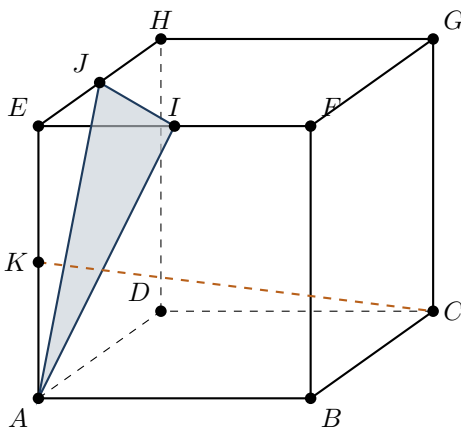
$u_n = e^{-n} = (e^{-1})^n$: (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-1} = \frac{1}{e} \in]0; 1[$ et de premier terme $u_0 = 1$.

$$S_n = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{e-1}.$$

Réponse : Affirmation 5 vraie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$.

3 Exercice 3 — Géométrie dans le cube (4 points)

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.



1. Les coordonnées d'un milieu sont les moyennes des coordonnées des extrémités :

Résultat

$I(\frac{1}{2}; 0; 1)$ (milieu de $[EF]$), $J(0; \frac{1}{2}; 1)$ (milieu de $[EH]$), $K(0; 0; \frac{1}{2})$ (milieu de $[AE]$).

2. a.

Référence cours : produit scalaire et angle

Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$.

$\vec{AI}(\frac{1}{2}; 0; 1)$ et $\vec{AJ}(0; \frac{1}{2}; 1)$, donc

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 1.$$

Résultat

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = 1.$$

2. b. $AI = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et de même $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$. D'où

$$\cos \widehat{IAJ} = \frac{\vec{AI} \cdot \vec{AJ}}{AI \times AJ} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \text{donc} \quad \widehat{IAJ} = \arccos(0,8) \approx 36,87^\circ.$$

Résultat

$$\widehat{IAJ} \approx 36,9^\circ \quad (\text{calculatrice en mode degrés}).$$

3. a.

Référence cours : vecteur normal

Un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est normal à ce plan.

$$\vec{KC}(1 - 0; 1 - 0; 0 - \frac{1}{2}) = (1; 1; -\frac{1}{2}).$$

$$\vec{KC} \cdot \vec{AI} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0, \quad \vec{KC} \cdot \vec{AJ} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\vec{AJ}$ est nulle, pas celle de $\vec{AI}$).

Résultat

$\vec{KC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ) : c'est un **vecteur normal** à (AIJ) .

3. b. Le plan (AIJ) a une équation $x + y - \frac{1}{2}z + d = 0$. Il passe par $A(0; 0; 0)$, donc $d = 0$.

Résultat

$$(AIJ) : x + y - \frac{1}{2}z = 0. \quad (\text{Contrôle : } I \text{ donne } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, J \text{ donne } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.)$$

4. a. L est l'intersection de (AIJ) avec la droite passant par C et dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{KC}$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (1+t) + (1+t) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}t \right) = 0 \iff 2 + \frac{9}{4}t = 0 \iff t = -\frac{8}{9}.$$

Résultat

$$L \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{4}{9} \right).$$

4. b. La distance de C au plan est CL . On a $\overrightarrow{CL} = t \overrightarrow{KC}$ avec $t = -\frac{8}{9}$, et $\|\overrightarrow{KC}\| = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, donc

$$CL = |t| \times \|\overrightarrow{KC}\| = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{3}.$$

Résultat

La distance du point C au plan (AIJ) est $\frac{4}{3}$.

5. a. $M(1; m; 1)$ et $I(\frac{1}{2}; 0; 1) : \overrightarrow{IM}(\frac{1}{2}; m; 0)$. La droite (IM) passe par I et est dirigée par $\overrightarrow{IM}$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = 0 + ms = ms \\ z = 1 + 0 \times s = 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Résultat

On retrouve la représentation proposée ($s = 0$ donne I , $s = 1$ donne M).

5. b.

Référence cours : droites coplanaires

Deux droites de l'espace sont coplanaires si et seulement si elles sont **parallèles** ou **sécantes**.

Parallèles ? $\overrightarrow{IM}(\frac{1}{2}; m; 0)$ et $\overrightarrow{KC}(1; 1; -\frac{1}{2})$ ne sont jamais colinéaires (troisième coordonnée nulle pour l'un, non nulle pour l'autre).

Sécantes ? $(KC) : x = t, y = t, z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$. Les points de (IM) vérifient $z = 1$; sur (KC) , $z = 1 \iff t = -1$, ce qui donne le point $P(-1; -1; 1)$. $P \in (IM)$ si $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = -1$, soit $s = -3$, et $ms = -1$, soit $m = \frac{1}{3}$.

Résultat

Non. Les droites (IM) et (KC) ne sont coplanaires (sécantes en $P(-1; -1; 1)$) que pour $m = \frac{1}{3}$; pour toute autre valeur de m , elles ne sont ni parallèles ni sécantes, donc non coplanaires.

4 Exercice 4 — Étude de $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ (6 points)

4.1 Partie A — Étude de la fonction

1. a.

Référence cours : limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (croissances comparées).}$$

En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) = \ln x \times \frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$ (produit).

En $+\infty$: $f(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$, avec $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 0$.

Résultat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

1. b.

Résultat

La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$; la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est **asymptote horizontale** en $+\infty$.

2.

Référence cours : dérivée d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

Résultat

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$

3. Pour $x > 0$, $x^3 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $1 - 2 \ln x$.

$$1 - 2 \ln x > 0 \iff \ln x < \frac{1}{2} \iff x < e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Maximum : $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e} \approx 0,184.$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$-\infty$	0

4.

Référence cours : équation de la tangente

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$ et $f'(1) = \frac{1-0}{1} = 1$, donc $y = 1 \times (x - 1) + 0$.

Résultat

$\Delta : \boxed{y = x - 1}.$

5. On dérive $f'(x) = (1 - 2 \ln x) \times x^{-3}$ comme un produit :

$$f''(x) = -\frac{2}{x} \times x^{-3} + (1 - 2 \ln x) \times (-3x^{-4}) = \frac{-2}{x^4} + \frac{-3 + 6 \ln x}{x^4} = \frac{-5 + 6 \ln x}{x^4}.$$

Résultat

Pour tout $x > 0$, $\boxed{f''(x) = \frac{-5 + 6 \ln x}{x^4}}.$

6. a.

Référence cours : convexité et point d'inflexion

f est convexe sur I si $f'' \geq 0$ sur I , concave si $f'' \leq 0$. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente : f'' s'y annule **en changeant de signe**.

$x^4 > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $-5 + 6 \ln x$: $-5 + 6 \ln x \geq 0 \iff \ln x \geq \frac{5}{6} \iff x \geq e^{5/6}.$

Ordonnée : $f(e^{5/6}) = \frac{5/6}{(e^{5/6})^2} = \frac{5}{6e^{5/3}} \approx 0,157.$

Résultat

f est **concave** sur $]0; e^{5/6}]$ et **convexe** sur $[e^{5/6}; +\infty[$. La courbe admet un unique point d'inflexion : $\boxed{\left(e^{5/6}; \frac{5}{6e^{5/3}}\right)}$, avec $e^{5/6} \approx 2,30$.

6. b.

Référence cours : position courbe / tangente

Si f est **concave** sur un intervalle I , sa courbe est **en dessous** de chacune de ses tangentes en des points de I .

f est concave sur $]0; e^{5/6}]$ et $1 \in]0; e^{5/6}]$ (car $e^{5/6} > 1$). La courbe est donc sous la tangente $\Delta : y = x - 1$ sur cet intervalle.

Résultat

Pour tout $x \in]0; e^{5/6}]$, $x - 1 \geq \frac{\ln x}{x^2}$.

7. Pour $x \geq e^{5/6}$: d'une part $x - 1 \geq e^{5/6} - 1 \approx 1,30$; d'autre part, d'après le tableau de variation, $f(x) \leq \frac{1}{2e} \approx 0,18$ (maximum de f). Donc

$$\frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{2e} < 1 < e^{5/6} - 1 \leq x - 1.$$

(On a bien $e^{5/6} > 2$ car $\frac{5}{6} > \ln 2 \approx 0,69$.)

Résultat

L'inégalité $x - 1 \geq \frac{\ln x}{x^2}$ est vraie aussi sur $[e^{5/6}; +\infty[$, donc sur tout $]0; +\infty[$.

4.2 Partie B — La suite $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

1.

Référence cours : intégrale d'une fonction positive

Si f est continue et positive sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Résultat

Pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$: I_n est l'**aire** (en u.a.) du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2. D'après la relation de Chasles,

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0,$$

par positivité de l'intégrale, car $f \geq 0$ sur $[n; n+1] \subset [1; +\infty[$.

Résultat

Pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} \geq I_n$: la suite (I_n) est **croissante**.

3. Les rectangles ont une largeur de 1. Le premier, sur $[1; 2]$, a pour hauteur le maximum $\frac{1}{2e}$ de f (valeur initiale de S). Les suivants, sur $[i; i+1]$ pour i de 2 à 9, ont pour hauteur $f(i) = \frac{\ln i}{i^2}$ (valeur à gauche, car f décroît sur $[2; 10]$).

```
from math import *
S = 1/(2*exp(1))
for i in range(2, 10):
    S = S + log(i)/i**2
print(S)
```

Point de vigilance

En Python, `log` est le logarithme népérien $\ln$, et `range(2,10)` donne $i = 2, 3, \dots, 9$ (la borne 10 est exclue) : il y a bien 8 rectangles après le premier. Le script affiche $S \approx 0,779$.

4.

Référence cours : intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

On pose $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, $v(x) = -\frac{1}{x}$:

$$I_n = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x} \right) dx = -\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln 1}{1} + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln n}{n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n.$$

$$I_n = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + 1 = \frac{n-1-\ln n}{n}.$$

Résultat

Pour tout $n \geq 1$, $I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$. (Par exemple $I_{10} \approx 0,670$: l'approximation 0,779 de la question 3 est une valeur par excès, les rectangles dépassant la courbe.)

5. $I_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n}$, avec $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées).

Résultat

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$: l'aire sous la courbe, de 1 à l'infini, vaut 1 unité d'aire.