Baccalauréat général — Session 2026

Corrigé détaillé

Mathématiques — Épreuve d'enseignement de spécialité

Centres étrangers — Jour 2 — jeudi 11 juin 2026

Code du sujet officiel : 26-MATJ2G11

Objectif du document

Corrigé rédigé question par question : chaque réponse rappelle la formule ou le théorème du cours utilisé (encadrés **Référence cours**), détaille les calculs étape par étape et encadre le résultat final. Les erreurs fréquentes sont signalées dans les encadrés **Point de vigilance**.

Durée de l'épreuve : 4 heures. Calculatrice en mode examen autorisée. Quatre exercices indépendants.

Exercice	Thèmes abordés	Points
1	Géométrie dans l'espace : plan, vecteur normal, angle, droite orthogonale, distance à un plan	4
2	Probabilités : arbre à trois branches, loi binomiale, moyenne d'échantillon, Bienaymé-Tchebychev	4
3	Fonction logarithme, TVI, suite récurrente $a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$, encadrement, Python	6
4	Courbes de f, f', f'' ; équation différentielle ; intégration par parties ; tangentes passant par l'origine	6

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Exercice 1 — Géométrie dans l'espace (4 points) 3

2 Exercice 2 — Réseau social (4 points) 5

2.1 Partie A — Arbre et probabilités totales 5

2.2 Partie B — Loi binomiale 6

2.3 Partie C — Moyenne sur 150 villes 6

3 Exercice 3 — Logarithme et suite récurrente (6 points) 7

3.1 Partie A — Les fonctions f et g 7

3.2 Partie B — La suite (a_n) avec $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$ 8

3.3 Partie C — Encadrement et algorithme 9

4 Exercice 4 — Équation différentielle et tangentes (6 points) 9

4.1 Partie A — Associer f, f', f'' aux courbes 9

4.2 Partie B — L'équation $(E) : y' + y = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ 9

4.3 Partie C — Étude de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2)$ 10

4.4 Partie D — Tangentes passant par l'origine 11

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1 Exercice 1 — Géométrie dans l'espace (4 points)

Données : $A(1;0;3)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;1;1)$, $H(0;2;1)$ et $\vec{n}(4;4;2)$.

1.

Référence cours : trois points définissent un plan

A, B, C définissent un plan si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}(2-1;1-0;-1-3) = (1;1;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(1-1;1-0;1-3) = (0;1;-2)$.
Si $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, les abscisses donneraient $0 = \lambda \times 1$, donc $\lambda = 0$, puis $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$: c'est faux (ordonnée 1).

Résultat

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : A, B, C **définissent un plan**.

2.

Référence cours : vecteur normal

$\vec{n} \neq \vec{0}$ est normal au plan (ABC) si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, avec $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires. En repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times (-4) = 4 + 4 - 8 = 0, \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times (-2) = 0.$$

Résultat

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : c'est un **vecteur normal** à (ABC).

3. Une équation est $4x + 4y + 2z + d = 0$. Avec $A(1;0;3)$: $4 + 0 + 6 + d = 0$, donc $d = -10$. On peut tout diviser par 2.

Résultat

(ABC) : $\boxed{2x + 2y + z - 5 = 0}$ (ou $4x + 4y + 2z - 10 = 0$).

4. Pour $H(0;2;1)$: $2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 - 5 = 0$.

Résultat

Les coordonnées de H vérifient l'équation : $\boxed{H \in (ABC)}$.

5.

Référence cours : angle géométrique et produit scalaire

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\widehat{BAH}$.

$\overrightarrow{AH}(0-1;2-0;1-3) = (-1;2;-2)$. Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + (-4) \times (-2) = -1 + 2 + 8 = 9,$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$AB = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \qquad AH = \sqrt{1+4+4} = 3,$$
$$\cos\widehat{BAH} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}}{AB \times AH} = \frac{9}{3\sqrt{2}\times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Résultat

$\boxed{\widehat{BAH} = 45°}$ (car $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

6. La droite (d) est orthogonale au plan : elle est dirigée par un vecteur normal. On prend $\frac{1}{2}\vec{n} = (2;2;1)$, plus simple. Elle passe par $H(0;2;1)$:

Résultat

$$(d) : \boxed{\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

7.

Référence cours : distance d'un point à un plan

Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan $\mathcal{P}$, la distance de S à $\mathcal{P}$ est SH.

H est dans le plan et (d) est orthogonale au plan en H : pour tout point S de (d), H est le projeté orthogonal de S sur (ABC), donc la distance de S au plan est SH.
Pour S de paramètre t : $\overrightarrow{HS} = t\,(2;2;1)$, donc $SH = |t| \times \sqrt{4+4+1} = 3|t|$.

$$3|t| = 6 \iff t = 2 \text{ ou } t = -2.$$

L'abscisse $x_S = 2t$ doit être positive : $t = 2$, d'où $S(4\,;6\,;3)$.

Résultat

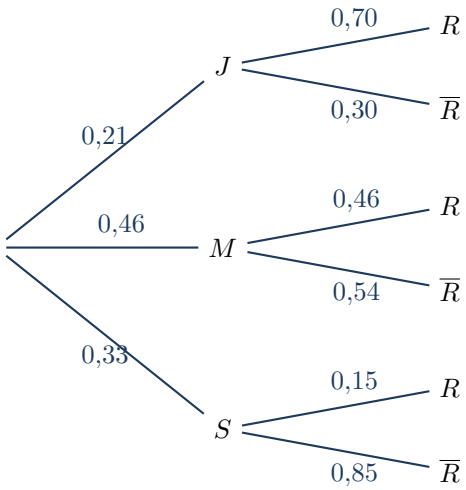
$\boxed{S(4\,;6\,;3)}$. (Contrôle : $HS = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$.)

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2 Exercice 2 — Réseau social (4 points)

2.1 Partie A — Arbre et probabilités totales

1.



2.

Référence cours : probabilité d'une intersection

$P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R)$.

$$P(M \cap R) = 0{,}46 \times 0{,}46 = 0{,}2116.$$

Résultat

$\boxed{P(M \cap R) \approx 0{,}212}$: environ 21,2 % des personnes ont entre 30 et 59 ans **et** ont déjà publié sur ce réseau.

3. a.

Référence cours : formule des probabilités totales

J, M, S forment une partition de l'univers, donc $P(R) = P(J \cap R) + P(M \cap R) + P(S \cap R)$.

$$P(R) = 0{,}21 \times 0{,}70 + 0{,}2116 + 0{,}33 \times 0{,}15 = 0{,}147 + 0{,}2116 + 0{,}0495 = 0{,}4081.$$

Résultat

$\boxed{P(R) \approx 0{,}408}$.

3. b.

$$P_R(S) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}0495}{0{,}4081} \approx 0{,}121.$$

Résultat

Sachant que la personne a déjà publié, la probabilité qu'elle ait au moins 60 ans est $\boxed{\approx 0{,}121}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Point de vigilance

Il faut diviser par $P(R)$ **non arrondie** (0,4081) pour obtenir le bon arrondi au millième.

2.2 Partie B — Loi binomiale

Référence cours : loi binomiale

Nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p : $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

1. 100 tirages assimilés à des tirages avec remise (donc indépendants), succès « a déjà publié » de probabilité 0,41.

Résultat

$X \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}41)$: $\boxed{n = 100}$, $\boxed{p = 0{,}41}$.

2. « Au moins la moitié » : $X \geqslant 50$.

$$P(X \geqslant 50) = 1 - P(X \leqslant 49) \approx 1 - 0{,}957 = 0{,}043.$$

À la calculatrice

TI : `1-binomFRép(100,0.41,49)` — Casio : `1-BinomialCD(49,100,0.41)`.

Résultat

$\boxed{P(X \geqslant 50) \approx 0{,}043}$.

3. $E(X) = 100 \times 0{,}41 = 41$.

Résultat

$\boxed{E(X) = 41}$: en répétant ce sondage un grand nombre de fois, on obtiendrait **en moyenne** 41 personnes sur 100 ayant déjà publié sur ce réseau social.

2.3 Partie C — Moyenne sur 150 villes

Référence cours : moyenne d'échantillon et Bienaymé-Tchebychev

Si $X_1, \ldots, X_N$ sont indépendantes, de même loi que X, et $Y = \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N}$, alors $E(Y) = E(X)$ et $V(Y) = \frac{V(X)}{N}$.

Pour tout $\delta > 0$: $P\left(|Y - E(Y)| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(Y)}{\delta^2}$.

$V(X) = 100 \times 0{,}41 \times 0{,}59 = 24{,}19$, donc $E(Y) = 41$ et $V(Y) = \dfrac{24{,}19}{150} \approx 0{,}1613$.

« $37 < Y < 45$ » équivaut à $-4 < Y - 41 < 4$, soit $|Y - 41| < 4$: c'est l'événement contraire de $|Y - 41| \geqslant 4$. Avec $\delta = 4$:

$$P(37 < Y < 45) = 1 - P\left(|Y - 41| \geqslant 4\right) \geqslant 1 - \frac{V(Y)}{4^2} = 1 - \frac{24{,}19}{150 \times 16} = 1 - \frac{24{,}19}{2400} \approx 1 - 0{,}0101 = 0{,}9899.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Résultat

$P(37 < Y < 45) \geqslant 0{,}989\,9$, donc la probabilité est **strictement supérieure à** 98 %.

3 Exercice 3 — Logarithme et suite récurrente (6 points)

3.1 Partie A — Les fonctions f et g

1.

Référence cours : dérivée de $\ln(u)$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Sur $[2;+\infty[$, $u(x) = 3x^2 + 2x > 0$ et $u'(x) = 6x + 2$, donc

$$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x}.$$

Pour $x \geqslant 2$, le numérateur $6x+2$ et le dénominateur $3x^2+2x = x(3x+2)$ sont strictement positifs.

Résultat

$f'(x) > 0$ sur $[2;+\infty[$: f est **strictement croissante** sur $[2;+\infty[$.

2. a.

Référence cours : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si g est continue et strictement monotone sur un intervalle I, et si 0 est compris entre les bornes (valeurs ou limites) de g sur I, l'équation $g(x) = 0$ a une **unique** solution dans I.

g est continue sur $[2;+\infty[$ (dérivable), strictement décroissante (admis), avec

$$g(2) = \ln(12+4) - 2 = \ln 16 - 2 \approx 0{,}77 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Résultat

0 est compris entre $g(2) > 0$ et $-\infty$: l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[2;+\infty[$.

2. b.

À la calculatrice

Table de g : $g(4{,}04) \approx 0{,}004 > 0$, $g(4{,}045) \approx 0{,}001 > 0$ et $g(4{,}05) \approx -0{,}002 < 0$, donc $4{,}045 < \alpha < 4{,}05$.

Résultat

$\boxed{\alpha \approx 4{,}05}$ au centième.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. c. g est strictement décroissante et s'annule en α :

x	2		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Autrement dit : $f(x) > x$ sur $[2;\alpha[$, $f(\alpha) = \alpha$, et $f(x) < x$ sur $]\alpha;+\infty[$.

3.2 Partie B — La suite (a_n) avec $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$

On remarque que $a_{n+1} = f(a_n)$.

1. Récurrence sur $P(n)$: « $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ ».

— **Initialisation :** $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$ par hypothèse.

— **Hérédité :** supposons $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$. Comme f est croissante sur $[2;+\infty[$:

$$f(2) \leqslant f(a_n) \leqslant f(\alpha), \qquad \text{soit} \qquad \ln 16 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha,$$

car $f(\alpha) = \alpha$ (puisque $g(\alpha) = 0$). Or $\ln 16 \approx 2{,}77 \geqslant 2$, donc $2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$.

— **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Pour tout n, $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = g(a_n)$. Or $a_n \in [2;\alpha]$, intervalle sur lequel $g \geqslant 0$ (question A.2.c).

Résultat

$a_{n+1} - a_n \geqslant 0$: la suite (a_n) est **croissante**.

3.

Référence cours : théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge.

Résultat

(a_n) est croissante et majorée par α : elle **converge**.

4. Soit ℓ la limite. Comme $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ pour tout n, on a $2 \leqslant \ell \leqslant \alpha$ (passage à la limite dans les inégalités). La fonction f est continue en ℓ ; en passant à la limite dans $a_{n+1} = f(a_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$.

Résultat

ℓ est une solution de $g(x) = 0$ dans $[2;+\infty[$; par unicité (A.2.a), $\boxed{\ell = \alpha}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3.3 Partie C — Encadrement et algorithme

1. D'après la partie B (avec $a_0 = 2$), (a_n) est croissante de limite α, donc $a_n \leqslant \alpha$ pour tout n. La suite (b_n) est strictement décroissante de limite α, donc $b_n \geqslant \alpha$ pour tout n (une suite décroissante est minorée par sa limite).

Résultat

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n}$, donc $a_n \leqslant b_n$.

2. a. La boucle calcule simultanément a_n et b_n et s'arrête dès que $b_n - a_n \leqslant 10^{-2}$. On obtient les valeurs suivantes (arrondies au millième) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	2	2,773	3,354	3,700	3,881	3,969	4,011	4,030	4,039	4,044
b_n	10	5,768	4,713	4,331	4,174	4,104	4,073	4,059	4,053	4,050
$b_n - a_n$	8	2,996	1,359	0,631	0,293	0,135	0,062	0,029	0,013	0,006

Résultat

`algo(2)` renvoie $\boxed{(9\ ;\ 4{,}044)}$: la boucle s'arrête pour $n = 9$, avec $a_9 \approx 4{,}044$.

2. b.

Résultat

9 est le plus petit rang n pour lequel $b_n - a_n \leqslant 10^{-2}$. Comme $a_9 \leqslant \alpha \leqslant b_9$, la valeur $a_9 \approx 4{,}044$ est une **valeur approchée de α par défaut à 10^{-2} près**.

4 Exercice 4 — Équation différentielle et tangentes (6 points)

4.1 Partie A — Associer f, f', f'' aux courbes

Méthode

Là où une courbe change de variation (maximum ou minimum), la courbe de sa dérivée coupe l'axe des abscisses.

$\mathcal{C}_1$ s'annule en 1 et 2, a un minimum vers 1,4 et un maximum vers 3,6 ; $\mathcal{C}_3$ s'annule justement vers 1,4 et 3,6 et atteint son maximum en 2 ; $\mathcal{C}_2$ s'annule en 2.

Résultat

$f \longleftrightarrow \mathcal{C}_1 \qquad f' \longleftrightarrow \mathcal{C}_3 \qquad f'' \longleftrightarrow \mathcal{C}_2$.

4.2 Partie B — L'équation (E) : $y' + y = (2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$

1.

Référence cours : dérivée d'un produit

$(uv)' = u'v + uv'$ et $(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$g(x) = (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$, donc

$$g'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x} + (x^2-3x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x} - (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}.$$

$$g'(x) + g(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x} - (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x} + (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x} = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

Résultat

g est une **solution particulière** de (E).

2.

Référence cours : équation $y' = ay$

Les solutions de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

$y' + y = 0 \iff y' = -y : a = -1$.

Résultat

Les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions $\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

3.

Référence cours : structure des solutions

Les solutions de $y' + y = h$ sont les fonctions $y_0 + g$, où g est une solution particulière et y_0 une solution quelconque de l'équation homogène $y' + y = 0$.

Résultat

Les solutions de (E) sont les fonctions $\boxed{x \mapsto (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} = (x^2-3x+C)\mathrm{e}^{-x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

4. $f(0) = (0 - 0 + C)\mathrm{e}^0 = C$, donc $C = 2$.

Résultat

$\boxed{f(x) = (x^2-3x+2)\mathrm{e}^{-x}}$: c'est la fonction étudiée en partie C.

4.3 Partie C — Étude de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2)$

1. $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $x^2 - 3x + 2$. Discriminant : $\Delta = 9 - 8 = 1$, racines $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Un trinôme est du signe de son coefficient $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. En $-\infty$: $-x \to +\infty$ donc $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, et $x^2 - 3x + 2 \to +\infty$ (terme de plus haut degré x^2).

Résultat

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ (produit).

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. b.

Référence cours : croissances comparées

Pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$.

$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$: chaque terme tend vers 0.

Résultat

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3. a.

Référence cours : intégration par parties

$$\int_a^b u\,v' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'\,v.$$

Première intégration par parties. $u(x) = x^2-3x+2$, $u'(x) = 2x-3$; $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$I = \Big[-(x^2-3x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big(-0\times\mathrm{e}^{-1}+2\big) + J = 2 + J,$$

où $J = \displaystyle\int_0^1 (2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Deuxième intégration par parties. $u(x) = 2x-3$, $u'(x) = 2$; $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$J = \Big[-(2x-3)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big(\mathrm{e}^{-1}-3\big) + \Big[-2\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = \mathrm{e}^{-1} - 3 - 2\mathrm{e}^{-1} + 2 = -1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc $I = 2 + (-1-\mathrm{e}^{-1}) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Résultat

$\boxed{I = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}} \approx 0{,}632$.

3. b. Sur $[0;1]$, $f \geqslant 0$ (question 1).

Résultat

I est l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$: environ 0,63 u.a.

4.4 Partie D — Tangentes passant par l'origine

1.

Référence cours : équation de la tangente

$(T_a) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0, d'ordonnée $f(a) - af'(a)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x} - (x^2-3x+2)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2+5x-5)\mathrm{e}^{-x}$. L'ordonnée à l'origine de (T_a) est

$$\begin{aligned} f(a) - af'(a) &= \mathrm{e}^{-a}\left[(a^2-3a+2) - a(-a^2+5a-5)\right] \\ &= \mathrm{e}^{-a}\left[a^2-3a+2+a^3-5a^2+5a\right] = (a^3-4a^2+2a+2)\mathrm{e}^{-a}. \end{aligned}$$

Résultat

(T_a) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\boxed{(a^3-4a^2+2a+2)\mathrm{e}^{-a}}$.

2. (T_a) passe par l'origine si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle, soit (car $\mathrm{e}^{-a} \neq 0$) :

$$h(a) = a^3 - 4a^2 + 2a + 2 = 0.$$

Étude de h. $h'(a) = 3a^2 - 8a + 2$, de discriminant $64 - 24 = 40$, qui s'annule en $a_1 = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3} \approx 0{,}28$ et $a_2 = \dfrac{4+\sqrt{10}}{3} \approx 2{,}39$. h' est positive à l'extérieur des racines.

a	$-\infty$		a_1		a_2		$+\infty$
$h'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(a)$	$-\infty$	↗	$\approx 2{,}27$	↘	$\approx -2{,}42$	↗	$+\infty$

Sur chacun des trois intervalles $]-\infty; a_1]$, $[a_1; a_2]$, $[a_2; +\infty[$, h est continue et strictement monotone, et 0 est compris entre les bornes ($-\infty$ et $h(a_1) > 0$; $h(a_1) > 0$ et $h(a_2) < 0$; $h(a_2) < 0$ et $+\infty$). D'après le corollaire du TVI, h s'annule exactement une fois sur chacun : en $a \approx -0{,}48$, $a \approx 1{,}31$ et $a \approx 3{,}17$.

Résultat

L'équation $h(a) = 0$ a exactement trois solutions : il y a **trois tangentes** à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.

Point de vigilance

Les limites de h se déduisent du terme de plus haut degré : $a^3 \to \pm\infty$ quand $a \to \pm\infty$. Ne pas oublier de justifier que $h(a_1) > 0$ et $h(a_2) < 0$ par un calcul (ici $h(a_1) \approx 2{,}27$ et $h(a_2) \approx -2{,}42$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).