

Baccalauréat général — Session 2026

Corrigé détaillé

Mathématiques — Épreuve d'enseignement de spécialité

Métropole — Jour 2 — mercredi 17 juin 2026

Code du sujet officiel : 26-MATJ2ME1

Objectif du document

Corrigé rédigé question par question : chaque réponse rappelle la formule ou le théorème du cours utilisé (encadrés **Référence cours**), détaille les calculs étape par étape et encadre le résultat final. Les erreurs fréquentes sont signalées dans les encadrés **Point de vigilance**.

Durée de l'épreuve : 4 heures. Calculatrice en mode examen autorisée. Quatre exercices indépendants.

Exercice	Thèmes abordés	Points
1	Géométrie dans l'espace : plan, droite orthogonale, projeté orthogonal, aire, volume	5
2	Suite récurrente, Python, récurrence, équation différentielle $y' = ay + b$	5
3	Vrai/faux : probabilités conditionnelles, loi binomiale, Bienaymé-Tchebychev, dénombrement	4
4	Fonction exponentielle, primitives, TVI, intégration par parties	6

Table des matières

1	Exercice 1 — Géométrie dans l'espace (5 points)	3
1.1	Question 1 — Les points A, B, C définissent un plan	3
1.2	Question 2 — Vecteur normal et équation cartésienne	3
1.3	Question 3 — Représentation paramétrique de Δ	4
1.4	Question 4 — Projeté orthogonal de D sur (ABC)	4
1.5	Question 5 — Le triangle ABC	5
1.6	Question 6 — Volume du tétraèdre et aire de BCD	5
1.7	Question 7 — Les points $D_k(0; 0; k)$	6
2	Exercice 2 — Pollution d'un bassin (5 points)	6
2.1	Partie A — Modèle discret	6
2.2	Partie B — Modèle continu	8
3	Exercice 3 — Vrai ou faux (4 points)	10
3.1	Affirmation 1 — Probabilité conditionnelle	10
3.2	Affirmation 2 — Loi binomiale	10
3.3	Affirmation 3 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	10
3.4	Affirmation 4 — Dénombrement	11
4	Exercice 4 — Fonction, primitives et logo (6 points)	11
4.1	Partie A — Lectures graphiques	11
4.2	Partie B — Étude de $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$	12
4.3	Partie C — Le porte-clé	14

1 Exercice 1 — Géométrie dans l'espace (5 points)

Données : $A(2; 1; 1)$, $B(3; -2; 0)$, $C(0; -1; 1)$ et $D(0; 0; 2)$ dans un repère orthonormé.

1.1 Question 1 — Les points A , B , C définissent un plan

Référence cours : trois points définissent un plan

Trois points A , B , C définissent un plan si et seulement s'ils ne sont **pas alignés**, c'est-à-dire si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont **pas colinéaires** (aucun réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$).

On calcule les coordonnées des vecteurs (arrivée moins départ) :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

S'il existait λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, la première coordonnée donnerait $-2 = \lambda \times 1$, donc $\lambda = -2$, et la deuxième donnerait $-2 = \lambda \times (-3)$, donc $\lambda = \frac{2}{3}$. C'est contradictoire.

Résultat

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A , B , C ne sont pas alignés et **définissent un plan**.

1.2 Question 2 — Vecteur normal et équation cartésienne

Référence cours : vecteur normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ non nul est normal au plan (ABC) si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x; y; z) \cdot \vec{v}(x'; y'; z') = xx' + yy' + zz'$.

Si $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à un plan, ce plan a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

2. a. Avec $\vec{n}(1; -1; 4)$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0.$$

Résultat

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, qui ne sont pas colinéaires (question 1) : $\vec{n}$ est **normal au plan** (ABC) .

2. b. Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $x - y + 4z + d = 0$. Le point $A(2; 1; 1)$ appartient au plan :

$$2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5.$$

Résultat

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y + 4z - 5 = 0$.

Point de vigilance

On peut vérifier avec B et C : $3 - (-2) + 0 - 5 = 0$ et $0 - (-1) + 4 - 5 = 0$. Ce contrôle prend dix secondes et évite de perdre tous les points des questions suivantes.

1.3 Question 3 — Représentation paramétrique de Δ

Référence cours : représentation paramétrique d'une droite

La droite passant par $M_0(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ admet la représentation

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est dirigée par un vecteur normal à ce plan.

La droite Δ est orthogonale à (ABC) : elle est dirigée par $\vec{n}(1; -1; 4)$. Elle passe par $D(0; 0; 2)$. On obtient

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t = t \\ y = 0 + (-1) \times t = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Résultat

C'est bien la représentation proposée : pour $t = 0$ on retrouve D , et le vecteur directeur lu devant t est $(1; -1; 4) = \vec{n}$.

1.4 Question 4 — Projeté orthogonal de D sur (ABC)

Référence cours : projeté orthogonal d'un point sur un plan

Le projeté orthogonal H d'un point D sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par D et orthogonale à $\mathcal{P}$.

H est donc l'intersection de Δ et de (ABC) . Un point de Δ a pour coordonnées $(t; -t; 2 + 4t)$; il appartient au plan si :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \iff 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \iff 18t + 3 = 0 \iff t = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}.$$

On remplace $t = -\frac{1}{6}$:

$$x = -\frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{6}, \quad z = 2 + 4 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Résultat

Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est $H \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3} \right)$.

1.5 Question 5 — Le triangle ABC

Référence cours : distance dans un repère orthonormé

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Aire d'un triangle : $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$. Dans un triangle isocèle en B , la médiane issue de B est aussi la hauteur.

5. a. On calcule $\vec{BC}(0 - 3; -1 + 2; 1 - 0) = (-3; 1; 1)$, puis :

$$BA = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}, \quad BC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11},$$

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Résultat

$BA = BC = \sqrt{11}$: le triangle ABC est **isocèle en B** .

5. b. Soit I le milieu de $[AC]$: $I \left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2} \right) = (1; 0; 1)$. Comme le triangle est isocèle en B , la médiane (BI) est aussi la hauteur issue de B . On a $\vec{BI}(1 - 3; 0 + 2; 1 - 0) = (-2; 2; 1)$ et

$$BI = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \times BI}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Résultat

L'aire du triangle ABC est bien $3\sqrt{2}$ (unité d'aire).

1.6 Question 6 — Volume du tétraèdre et aire de BCD

Référence cours : volume d'un tétraèdre et distance à un plan

$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

La distance d'un point D à un plan est la distance DH , où H est le projeté orthogonal de D sur ce plan.

6. a. On prend pour base le triangle ABC ; la hauteur associée est DH . On a

$$\vec{DH} \left(-\frac{1}{6} - 0; \frac{1}{6} - 0; \frac{4}{3} - 2 \right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{2}{3} \right), \quad \text{donc}$$

$$DH = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{1+1+16}{36}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \times 2}{6} = 1.$$

Résultat

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\boxed{V = 1}$ (unité de volume).

6. b. On change de base : on prend le triangle BCD , la hauteur associée est la distance de A au plan (BCD) , égale à $\sqrt{2}$. Le volume ne change pas :

$$1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times \sqrt{2} \iff \mathcal{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Résultat

L'aire du triangle BCD est $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ $\approx 2,12$ (unité d'aire).

1.7 Question 7 — Les points $D_k(0; 0; k)$

7. a. A, B, C, D_k sont coplanaires si et seulement si D_k appartient au plan (ABC) :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \iff k = \frac{5}{4}.$$

Résultat

Pour $\boxed{k = \frac{5}{4}}$, les quatre points sont coplanaires. Le point $D_{5/4}$ est alors dans le plan (ABC) : **il est son propre projeté orthogonal.**

7. b.

Méthode

A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) si et seulement si $A \in (ABC)$ (c'est vrai) et (AD_k) est orthogonale au plan, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD_k}$ colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ (ou nul).

On a $\overrightarrow{AD_k}(0 - 2; 0 - 1; k - 1) = (-2; -1; k - 1)$. S'il existait λ avec $\overrightarrow{AD_k} = \lambda\vec{n}$, on aurait $-2 = \lambda$ (abscisses) et $-1 = -\lambda$, soit $\lambda = 1$ (ordonnées) : c'est impossible, quel que soit k .

Résultat

Non : aucune valeur de k ne fait de A le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) . (Tous les points D_k ont $x = y = 0$, or la droite orthogonale au plan passant par A est formée des points $(2 + t; 1 - t; 1 + 4t)$, pour lesquels $x = 0$ impose $t = -2$ et alors $y = 3 \neq 0$.)

2 Exercice 2 — Pollution d'un bassin (5 points)**2.1 Partie A — Modèle discret**

$V_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$.

1. On applique la relation de récurrence :

$$V_1 = 0,995 \times V_0 + 6 = 0,995 \times 0 + 6 = 6, \quad V_2 = 0,995 \times V_1 + 6 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = 11,97.$$

Résultat

$V_1 = 6$ L et $V_2 = 11,97$ L.

2. La variable v part de $V_0 = 0$ et la boucle applique n fois la relation de récurrence :

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995 * v + 6
    return v
```

Point de vigilance

`range(n)` produit les valeurs $0, 1, \dots, n-1$: la boucle tourne exactement n fois, donc la fonction renvoie bien V_n . En Python, la virgule décimale s'écrit avec un point : `0.995`.

3.

Référence cours : raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$:

- 1) **Initialisation** : on vérifie $P(0)$;
- 2) **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un entier n quelconque et on démontre $P(n+1)$;
- 3) **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout n .

Soit $P(n)$: « $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ ».

Initialisation. $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$: on a bien $0 \leq 6 \leq 1200$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ pour un entier n . On multiplie par $0,995 > 0$ (l'ordre est conservé), puis on ajoute 6 :

$$0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1200 \implies 0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1194 + 6,$$

c'est-à-dire $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$: $P(n+1)$ est vraie.

Résultat

Par récurrence, pour tout entier naturel n : $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

4.

Référence cours : théorème de convergence monotone

Toute suite **croissante et majorée** converge. Si de plus $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g continue, la limite ℓ vérifie $\ell = g(\ell)$.

D'après la question 3, (V_n) est croissante ($V_n \leq V_{n+1}$) et majorée par 1200 : elle converge vers une limite ℓ . La fonction $g : x \mapsto 0,995x + 6$ est continue (affine), donc, en passant à la limite dans $V_{n+1} = 0,995V_n + 6$:

$$\ell = 0,995\ell + 6 \iff 0,005\ell = 6 \iff \ell = \frac{6}{0,005} = 1200.$$

Résultat

La suite (V_n) converge et $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1200}$: à long terme, le bassin contient environ 1 200 L de polluant.

2.2 Partie B — Modèle continu

$(E) : y' = -0,005y + 6$, avec $v(0) = 0$.

1. a.

Référence cours : équation différentielle $y' = ay + b$

Pour $a \neq 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle) de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$y(t) = C e^{at} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La fonction constante $t \mapsto -\frac{b}{a}$ est la solution particulière constante.

Ici $a = -0,005$ et $b = 6$, donc $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0,005} = 1200$.

Résultat

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $\boxed{t \mapsto C e^{-0,005t} + 1200}$, $C \in \mathbb{R}$.

1. b. v est une solution de (E) : il existe C tel que $v(t) = C e^{-0,005t} + 1200$. La condition $v(0) = 0$ donne $C \times e^0 + 1200 = 0$, donc $C = -1200$ et

$$v(t) = -1200 e^{-0,005t} + 1200 = 1200 (1 - e^{-0,005t}).$$

Résultat

Pour tout $t \geq 0$, $\boxed{v(t) = 1200 (1 - e^{-0,005t})}$.

1. c.

Référence cours : limite de l'exponentielle

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0.$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $-0,005t \rightarrow -\infty$, donc $e^{-0,005t} \rightarrow 0$ (limite d'une composée).

Résultat

$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200 \times (1 - 0) = 1200}$: on retrouve la limite du modèle discret.

1. d.

Référence cours : dérivée de $t \mapsto e^{kt}$

$$(e^{kt})' = k e^{kt}.$$

$v(t) = 1200 - 1200e^{-0,005t}$, donc

$$v'(t) = -1200 \times (-0,005)e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}.$$

Une exponentielle est strictement positive, donc $v'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. (On retrouve aussi $v' = -0,005v + 6$.)

Résultat

La fonction v est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

2. Le seuil de nettoyage est 5 % du volume du bassin : $0,05 \times 30\,000 = 1\,500$ L.

v est croissante de limite 1200, donc pour tout $t \geq 0$: $v(t) < 1200 < 1500$ (on a même $v(t) = 1200 - 1200e^{-0,005t} < 1200$ car $e^{-0,005t} > 0$).

Résultat

Le volume de polluant reste toujours inférieur à 1 200 L, donc à 1 500 L : selon ce modèle, **le nettoyage complet ne sera jamais nécessaire**.

3.

Référence cours : résoudre une inéquation avec l'exponentielle

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: pour $a > 0$ et $b > 0$, $a < b \iff \ln a < \ln b$.
Et $\ln(e^X) = X$.

On résout $v(t) > 50$:

$$1200(1 - e^{-0,005t}) > 50 \iff 1 - e^{-0,005t} > \frac{50}{1200} = \frac{1}{24} \iff e^{-0,005t} < \frac{23}{24} \iff -0,005t < \ln \frac{23}{24}.$$

On divise par $-0,005 < 0$, **ce qui change le sens** de l'inégalité :

$$t > \frac{\ln \frac{23}{24}}{-0,005} = -200 \ln \frac{23}{24} = 200 \ln \frac{24}{23}.$$

Comme v est strictement croissante et continue, le volume dépasse 50 L exactement à partir de l'instant $t_0 = 200 \ln \frac{24}{23}$.

Numériquement : $t_0 \approx 8,5119$ h, et $0,5119 \times 60 \approx 30,7$ min.

Résultat

L'instant cherché est $t_0 = 200 \ln \left(\frac{24}{23} \right)$ heures, soit environ **8 h 31 min**.

Point de vigilance

Pour convertir des heures décimales, seule la partie décimale se multiplie par 60 : 8,51 h ne vaut pas 8 h 51 min.

3 Exercice 3 — Vrai ou faux (4 points)

3.1 Affirmation 1 — Probabilité conditionnelle

Données : $P(O) = 0,52$, $P_O(F) = 0,32$, $P(F) = 0,20$.

Référence cours : probabilités conditionnelles

$$P(O \cap F) = P(O) \times P_O(F) \quad \text{et} \quad P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} \quad (\text{avec } P(F) \neq 0).$$

$$P(O \cap F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664, \quad P_F(O) = \frac{0,1664}{0,20} = 0,832.$$

Réponse : Affirmation 1 **vraie** : $P_F(O) = 0,832$.

3.2 Affirmation 2 — Loi binomiale

Référence cours : loi binomiale

Si l'on répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p , le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

Le prélèvement est assimilé à 5 000 tirages indépendants avec remise ; le succès « la personne est musicien professionnel » a pour probabilité 0,062. Donc $X \sim \mathcal{B}(5000; 0,062)$.

À la calculatrice

TI : `binomFRép(5000,0.062,340)` — Casio : `BinomialCD(340,5000,0.062)`.
On obtient $P(X \leq 340) \approx 0,962$.

Ordre de grandeur : $E(X) = 5000 \times 0,062 = 310$; la valeur 340 est au-dessus de la moyenne, il est donc naturel que $P(X \leq 340)$ soit nettement supérieure à 0,5.

Réponse : Affirmation 2 **fausse** : $P(X \leq 340) \approx 1,0$ au dixième ($\approx 0,96$), pas 0,4.

3.3 Affirmation 3 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Référence cours : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour toute variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V , et tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}, \quad \text{donc} \quad P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}.$$

$\mu = E(X) = 310$ et $V(X) = 5000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78$.

« $230 < X < 390$ » équivaut à « $-80 < X - 310 < 80$ », c'est-à-dire $|X - 310| < 80$ (l'intervalle est bien centré sur 310). Avec $\delta = 80$:

$$P(230 < X < 390) = P(|X - 310| < 80) \geq 1 - \frac{290,78}{80^2} = 1 - \frac{290,78}{6400} \approx 1 - 0,0454 = 0,9546.$$

Réponse : Affirmation 3 **vraie** : la probabilité est au moins 0,9546, donc supérieure à 95 %.

3.4 Affirmation 4 — Dénombrement

Référence cours : combinaisons

Le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (sans ordre, sans répétition) est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Principe multiplicatif : si un choix se fait en deux étapes indépendantes avec p puis q possibilités, il y a $p \times q$ choix.

Une équipe est formée de 2 musiciens choisis parmi les 4, et de 3 non-musiciens choisis parmi les 6 :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120.$$

Réponse : Affirmation 4 **vraie** : on peut former 120 équipes différentes.

Point de vigilance

On compte ici des *équipes* de 5 joueurs. Si l'on comptait les *partages* des 10 personnes en deux équipes, chaque partage serait compté deux fois (l'équipe choisie et l'équipe restante), d'où 60 partages : ce n'est pas la question posée.

4 Exercice 4 — Fonction, primitives et logo (6 points)

4.1 Partie A — Lectures graphiques

Référence cours : nombre dérivé et tangente

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a . Une tangente parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient directeur nul.

Coefficient directeur de la droite (AB) : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

1. a. La tangente en C (abscisse 1) est horizontale.

Résultat

$$f'(1) = 0.$$

1. b. La courbe coupe l'axe des abscisses en un seul point sur $[0; 3]$, le point $A(\frac{1}{2}; 0)$.

Résultat

Sur $[0; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = \frac{1}{2}$.

2. $f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de T_A , qui passe par $A(\frac{1}{2}; 0)$ et $B(1; e^2)$:

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{e^2}{\frac{1}{2}} = 2e^2.$$

Résultat

$$f'(\frac{1}{2}) = 2e^2 \approx 14,8.$$

3.

Référence cours : primitives

F est une primitive de f sur I si $F' = f$ sur I . Le signe de f donne donc le sens de variation de F .

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une **translation verticale**.

D'après le graphique, $f < 0$ sur $[0; \frac{1}{2}[$ et $f > 0$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$. Toute primitive F de f est donc décroissante sur $[0; \frac{1}{2}]$, croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, et atteint son minimum en $x = \frac{1}{2}$.

- $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont leur minimum en $x = \frac{1}{2}$; de plus $\mathcal{C}_2$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par une translation de 2 unités vers le bas (minimum en 0 pour $\mathcal{C}_1$, en -2 pour $\mathcal{C}_2$; limites environ 3,7 et 1,7).
- $\mathcal{C}_3$ atteint son minimum vers $x \approx 0,9$: la fonction associée serait encore décroissante sur $[\frac{1}{2}; 0,9]$, alors que $f > 0$ sur cet intervalle. $\mathcal{C}_3$ ne convient pas.

Résultat

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent des primitives de f ; $\mathcal{C}_3$ n'en représente pas.

4.2 Partie B — Étude de $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$

1. a. On utilise $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$:

$$e^{-2x+3} = e^{2-(2x-1)} = e^2 \times e^{-(2x-1)} = \frac{e^2}{e^{2x-1}}, \quad \text{donc} \quad f(x) = (2x - 1) \times \frac{e^2}{e^{2x-1}} = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

Résultat

Pour tout $x \geq 0$,
$$f(x) = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

1. b.

Référence cours : croissances comparées

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty, \text{ donc } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0.$$

On pose $X = 2x - 1$: quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$, donc $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$ et, par composition,

Résultat

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^2 \times 0 = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. a.

Référence cours : dérivée d'un produit et de e^u

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad (e^u)' = u'e^u.$$

Avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{-2x+3}$, $v'(x) = -2e^{-2x+3}$:

$$f'(x) = 2e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

Résultat

Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = (-4x + 4)e^{-2x+3}$.

2. b. $e^{-2x+3} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-4x + 4$, qui s'annule en $x = 1$, est positif avant et négatif après.

Valeurs : $f(0) = (0 - 1)e^3 = -e^3 \approx -20,1$; $f(1) = (2 - 1)e^1 = e \approx 2,72$; limite 0 en $+\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-e^3$	e	0

3.

Référence cours : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I , alors pour tout réel k compris entre les bornes (valeurs ou limites) de f sur I , l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans I .

La contrainte. Le logo est formé de la portion de $\mathcal{C}_f$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. À l'abscisse α (extrémité droite du logo), les deux bords sont aux ordonnées $f(\alpha)$ et $-f(\alpha)$; la largeur du logo y vaut donc $f(\alpha) - (-f(\alpha)) = 2f(\alpha)$ (en cm, le repère étant d'unité 1 cm). La contrainte du client s'écrit

$$2f(\alpha) = 0,3 \iff f(\alpha) = 0,15.$$

Existence et unicité. Sur $[1; +\infty[$, f est continue (produit de fonctions dérivables) et strictement décroissante, de $f(1) = e \approx 2,72$ jusqu'à la limite 0. Comme $0 < 0,15 < e$, l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.

À la calculatrice

Par balayage (table de valeurs) : $f(3,3) \approx 0,153 > 0,15$ et $f(3,4) \approx 0,128 < 0,15$, donc $3,3 < \alpha < 3,4$; plus finement $f(3,35) \approx 0,14$, d'où $\alpha \approx 3,31$.

Résultat

Il existe une unique valeur $\alpha \in [1; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0,15$, et $\boxed{\alpha \approx 3,3}$.

4.3 Partie C — Le porte-clé

1.

Référence cours : intégration par parties

Si u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[a; b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

On pose $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$; $v'(x) = e^{-2x+3}$, $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$ (une primitive de e^{-2x+3} est $-\frac{1}{2}e^{-2x+3}$ car $(e^{-2x+3})' = -2e^{-2x+3}$).

$$I = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} \, dx = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} \, dx.$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} - \frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = \left[-x e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3}$$

car $-\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2} = -x$. D'où

$$I = -3,3e^{-6,6+3} - (-0,5e^{-1+3}) = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx 3,6945 - 0,0902 \approx 3,604.$$

Résultat

$\boxed{I = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx 3,6}$ au dixième.

Point de vigilance

Pour vérifier une primitive obtenue par parties, on la dérive : $(-xe^{-2x+3})' = -e^{-2x+3} + 2xe^{-2x+3} = (2x-1)e^{-2x+3} = f(x)$.

2.

Référence cours : intégrale et aire

Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) \, dx$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$.

Sur $[0,5; 3,3]$, $f \geq 0$ (car $2x - 1 \geq 0$). La partie du logo située au-dessus de l'axe a pour aire I ; par symétrie, la partie située en dessous a la même aire. Avec $\alpha \approx 3,3$ et l'unité de 1 cm :

$$\mathcal{A}_{\text{logo}} = 2I \approx 7,21 \text{ cm}^2, \quad V = \mathcal{A}_{\text{logo}} \times 0,2 \approx 2 \times 3,6044 \times 0,2 \approx 1,44 \text{ cm}^3.$$

Résultat

Le volume du porte-clé est d'environ $\boxed{1,4 \text{ cm}^3}$.

Point de vigilance

Ne pas oublier le facteur 2 : l'intégrale I ne donne que la moitié supérieure du logo.