

Plaquette 2 – Aires du parallélogramme et du triangle

Aires et volumes — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Aires avec base et hauteur.

— La **hauteur** associée à une base est la distance entre cette base (prolongée si besoin) et le sommet opposé : elle est **perpendiculaire** à la base.

— Parallélogramme :

$$A = b \times h$$

— Triangle (moitié d'un parallélogramme) :

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

— Triangle rectangle : les deux côtés de l'angle droit sont une base et sa hauteur.

— Retrouver une hauteur : $h = A \div b$ pour un parallélogramme, $h = 2 \times A \div b$ pour un triangle.

— Figure complexe : on la **découpe** en rectangles et triangles, et on additionne (ou on soustrait) les aires.

Correction de l'exercice 1 – Choisir la bonne hauteur

On utilise la base $[AB]$ et la hauteur **associée** $[DH]$, perpendiculaire à (AB) :

$$A = b \times h = 6 \times 3 = 18 \text{ cm}^2$$

— La longueur $AD = 4 \text{ cm}$ ne sert pas : $[AD]$ est un côté, pas une hauteur (il n'est pas perpendiculaire à (AB)).

— Erreur fréquente : $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$, trop grand. Contrôle : le parallélogramme « penche », son aire est plus petite que celle d'un rectangle de 6 cm sur 4 cm.

Réponse. 18 cm^2 .

Correction de l'exercice 2 – Deux bases, deux hauteurs

a) Avec la base $[AB]$ et sa hauteur :

$$A = b \times h = 8 \times 3 = 24 \text{ cm}^2$$

— b) L'aire est la même quelle que soit la base choisie. Avec la base $[AD]$ de 4 cm et la hauteur inconnue h' : $4 \times h' = 24$, donc $h' = 24 \div 4 = 6 \text{ cm}$.

— Contrôle : la plus petite base a la plus grande hauteur ($4 \times 6 = 8 \times 3$). Et $h' = 6 \text{ cm}$ reste inférieure au côté $AB = 8 \text{ cm}$, ce qui est normal : une hauteur est la plus courte distance entre deux côtés parallèles.

Réponse. a) 24 cm^2 · b) 6 cm .

Correction de l'exercice 3 – Aire d'un triangle

La base $[AB]$ mesure 7 cm et la hauteur associée $[CH]$ mesure 4 cm :

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{7 \times 4}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

- Pourquoi diviser par 2 ? Deux triangles identiques accolés forment un parallélogramme de base 7 cm et de hauteur 4 cm, d'aire 28 cm².
- Le pied H de la hauteur peut être n'importe où sur la base : l'aire ne dépend que de b et h .

Réponse. 14 cm².

Correction de l'exercice 4 - Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit sont perpendiculaires : l'un est une base, l'autre la hauteur associée.

$$A = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \times 4,5}{2} = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$$

- L'hypoténuse $BC = 7,5$ cm ne sert pas ici (elle n'est perpendiculaire à aucun des deux autres côtés).
- Le triangle est la moitié d'un rectangle de 6 cm sur 4,5 cm (27 cm²).

Réponse. 13,5 cm².

Correction de l'exercice 5 - La hauteur tombe dehors

La formule s'applique encore : la hauteur est la distance de C à la **droite** (AB), même si son pied est hors du segment.

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{5 \times 3,2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

- Contrôle par différence : le triangle AHC (rectangle, base $AH = 6,5$ cm) a une aire de $\frac{6,5 \times 3,2}{2} = 10,4$ cm², le triangle BHC (base 1,5 cm) 2,4 cm², et $10,4 - 2,4 = 8$ cm².

Réponse. 8 cm².

Correction de l'exercice 6 - Retrouver une hauteur

On part de la formule et on cherche le facteur manquant.

$$\frac{b \times h}{2} = A \quad \text{donc} \quad b \times h = 2 \times A$$

- a) $8 \times h = 2 \times 24 = 48$, donc $h = 48 \div 8 = 6$ cm.
- b) $8 \times h = 24$, donc $h = 24 \div 8 = 3$ cm.
- Même aire et même base : la hauteur du triangle est le **double** de celle du parallélogramme, puisque le triangle n'occupe que la moitié du parallélogramme de même base et même hauteur.

Réponse. a) 6 cm · b) 3 cm.

Correction de l'exercice 7 - Sur un quadrillage

a) On prend comme base le côté horizontal : il mesure 6 carreaux. La hauteur associée est verticale : du sommet du haut à la ligne de la base, 4 carreaux.

$$A = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ carreaux}$$

- b) Un carreau est un carré de 0,5 cm de côté : son aire vaut $0,5 \times 0,5 = 0,25$ cm². Donc $12 \times 0,25 = 3$ cm².
- Piège : ne pas multiplier 12 par 0,5. L'aire d'un carreau n'est pas 0,5 cm², car on multiplie deux longueurs.

Réponse. a) 12 carreaux · b) 3 cm².

Correction de l'exercice 8 - Aire d'un losange

La diagonale de 8 cm partage le losange en deux triangles identiques. Pour chacun, cette diagonale est la base, et la hauteur est la moitié de l'autre diagonale ($5 \div 2 = 2,5$ cm), car les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

$$A_{\text{triangle}} = \frac{8 \times 2,5}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

- Losange : $2 \times 10 = 20 \text{ cm}^2$.
- Raccourci : c'est la moitié du rectangle de 8 cm sur 5 cm qui entoure le losange, $\frac{8 \times 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$.

Réponse. 20 cm^2 .

Correction de l'exercice 9 - Aire d'un trapèze

La diagonale découpe le trapèze en deux triangles qui ont **la même hauteur** : la distance entre les bases, 4 cm.

$$A = \frac{9 \times 4}{2} + \frac{5 \times 4}{2} = 18 + 10 = 28 \text{ cm}^2$$

- Premier triangle : base 9 cm (grande base), sommet sur la petite base.
- Second triangle : base 5 cm (petite base), sommet sur la grande base.
- Contrôle : l'aire est comprise entre celle du rectangle $5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$ et celle du rectangle $9 \times 4 = 36 \text{ cm}^2$.

Réponse. 28 cm^2 .

Correction de l'exercice 10 - Deux triangles de même aire

Les deux triangles ont :

- la même base $AB = 5$ cm ;
- la même hauteur : C et D sont sur une parallèle à (AB) , donc à la même distance 3 cm de (AB) .

$$A_{ABC} = A_{ABD} = \frac{5 \times 3}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$$

- Les deux triangles ont la même aire, bien qu'ils n'aient pas la même forme (et pas le même périmètre). On peut « faire glisser » le sommet sur la parallèle sans changer l'aire.

Réponse. Même aire : $7,5 \text{ cm}^2$ chacun.

Correction de l'exercice 11 - La médiane partage l'aire

Les deux triangles ont le même sommet A et des bases $[BM]$ et $[MC]$ sur la même droite (BC) : ils ont donc la **même hauteur** $AH = 4$ cm.

- M est le milieu de $[BC]$: $BM = MC = 4$ cm.

$$A_{ABM} = A_{AMC} = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

- Chacun a la moitié de l'aire de ABC ($\frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ cm}^2$). Le segment $[AM]$ (une **médiane**) partage le triangle en deux parties de même aire.

Réponse. Même aire : 8 cm^2 chacun.

Correction de l'exercice 12 - Semer un terrain

a) La « distance entre les côtés opposés » est la hauteur associée au côté de 45 m :

$$A = b \times h = 45 \times 28 = 1\,260 \text{ m}^2$$

— b) On cherche combien de fois 25 m² dans 1 260 m² : $1\,260 \div 25 = 50,4$.

— Il faut 50,4 kg de graines (en pratique, on achète 51 kg, ou plus si les sacs font 5 kg : 11 sacs).

Réponse. a) 1 260 m² · b) 50,4 kg.

Correction de l'exercice 13 - La voile du bateau

a) Les deux côtés de l'angle droit sont une base et sa hauteur :

$$A = \frac{4,2 \times 2,5}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25 \text{ m}^2$$

— b) Chaque m² pèse 180 g : $5,25 \times 180 = 945 \text{ g}$.

— La voile pèse 945 g, un peu moins de 1 kg.

Réponse. a) 5,25 m² · b) 945 g.

Correction de l'exercice 14 - Le pignon à peindre

On découpe : rectangle + triangle, puis on retire la porte.

— Rectangle : $8 \times 5 = 40 \text{ m}^2$.

— Triangle : base 8 m (largeur du pignon), hauteur 3 m :

$$\frac{8 \times 3}{2} = 12 \text{ m}^2$$

— Porte : $1 \times 2,2 = 2,2 \text{ m}^2$.

— Aire à peindre : $40 + 12 - 2,2 = 49,8 \text{ m}^2$.

Réponse. 49,8 m².

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : triangle dans un parallélogramme

— a) Parallélogramme : $A = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$.

— Le triangle ABE a la même base $[AB]$ et la même hauteur (distance de E , sur $[DC]$, à la droite (AB)) :

$$A_{ABE} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

— C'est exactement la **moitié** du parallélogramme, où que soit E sur $[DC]$.

— b) Les trois triangles recouvrent le parallélogramme sans se chevaucher :

$$A_{AED} + A_{BCE} = 24 - 12 = 12 \text{ cm}^2.$$

Réponse. a) 24 cm² et 12 cm² · b) 12 cm².