

Plaquette 3 – Disque, cercle et figures composées

Aires et volumes – Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cercle et disque de rayon r (diamètre $d = 2r$).

— Périmètre du cercle :

$$P = 2 \times \pi \times r = \pi \times d$$

— Aire du disque :

$$A = \pi \times r \times r = \pi \times r^2$$

- Demi-disque : la moitié de l'aire ; son contour comprend le demi-cercle **et** le diamètre. Quart de disque : le quart de l'aire ; son contour comprend le quart de cercle et deux rayons.
- Retrouver un rayon à partir du périmètre : $r = P \div (2 \times \pi)$.
- Valeur approchée : $\pi \approx 3,14$; on garde π dans les calculs et on arrondit le résultat final.
- Figure composée : on la découpe et on **additionne** les aires, ou on **retire** la partie enlevée ; pour le périmètre, on ne compte que le **contour extérieur**.

Correction de l'exercice 1 – À partir du diamètre

On commence par le rayon : $r = 12 \div 2 = 6$ cm.

a) Périmètre :

$$P = \pi \times d = \pi \times 12 = 12\pi \approx 37,7 \text{ cm}$$

— b) Aire : $A = \pi \times 6^2 = 36\pi \approx 113,1 \text{ cm}^2$.

— Piège : utiliser le diamètre dans la formule de l'aire donnerait 144π , quatre fois trop. L'aire se calcule **toujours** avec le rayon.

Réponse. a) $12\pi \approx 37,7$ cm · b) $36\pi \approx 113,1$ cm².

Correction de l'exercice 2 – Retrouver le rayon

Le tour du tronc est le périmètre d'un cercle :

$$P = 2 \times \pi \times r \quad \text{donc} \quad r = \frac{P}{2 \times \pi}$$

— $r = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \approx 7,96$ cm, soit 8,0 cm au millimètre près (79,6 mm arrondis à 80 mm).

— Diamètre : $d = 2r \approx 15,9$ cm.

— Contrôle : $\pi \times 15,9 \approx 50$, on retrouve le tour. Les forestiers utilisent cette méthode pour estimer le diamètre d'un arbre sans l'abattre.

Réponse. $r \approx 8,0$ cm ; $d \approx 15,9$ cm.

Correction de l'exercice 3 – Un quart de disque

Aire : le quart de l'aire du disque.

$$A = \frac{\pi \times 6^2}{4} = \frac{36\pi}{4} = 9\pi \approx 28,3 \text{ cm}^2$$

- Périmètre : le contour comprend le quart de cercle **et** les deux rayons.
- Quart de cercle : $\frac{2 \times \pi \times 6}{4} = 3\pi \approx 9,42$ cm.
- Total : $6 + 6 + 3\pi = 12 + 3\pi \approx 21,4$ cm.
- Piège : oublier les deux rayons donne 9,4 cm seulement.

Réponse. $A \approx 28,3$ cm² ; $P \approx 21,4$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Un demi-disque

Le rayon vaut $10 \div 2 = 5$ cm.

- Aire : la moitié de celle du disque.

$$A = \frac{\pi \times 5^2}{2} = 12,5\pi \approx 39,3 \text{ cm}^2$$

- Périmètre : demi-cercle + diamètre. Demi-cercle : $\frac{\pi \times 10}{2} = 5\pi \approx 15,71$ cm.
- Total : $10 + 5\pi \approx 25,7$ cm.

Réponse. $A \approx 39,3$ cm² ; $P \approx 25,7$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Une couronne

On retire l'aire du trou à celle du grand disque :

$$A = \pi \times 5^2 - \pi \times 3^2 = 25\pi - 9\pi = 16\pi$$

- $A = 16\pi \approx 50,3$ cm².
- Piège : ce n'est pas un disque de rayon $5 - 3 = 2$ cm ($4\pi \approx 12,6$ cm², beaucoup trop petit).

Réponse. $16\pi \approx 50,3$ cm².

Correction de l'exercice 6 - La roue du vélo

- a) En un tour, la roue « déroule » son périmètre sur le sol :

$$P = \pi \times d = \pi \times 70 = 70\pi \approx 219,9 \text{ cm}$$

- soit environ 2,20 m par tour.
- b) 1 km = 100 000 cm. Nombre de tours : $\frac{100\,000}{70\pi} \approx 454,7$.
- La roue fait donc environ 455 tours.

Réponse. a) $\approx 2,20$ m · b) environ 455 tours.

Correction de l'exercice 7 - La piste du stade

Les deux demi-disques forment ensemble un disque entier de diamètre 60 m (rayon 30 m).

- a) Contour : les deux côtés de 100 m et un cercle complet de diamètre 60 m.

$$P = 2 \times 100 + \pi \times 60 = 200 + 60\pi \approx 388,5 \text{ m}$$

- Les deux côtés de 60 m sont intérieurs : ils ne comptent pas.
- b) Rectangle : $100 \times 60 = 6\,000$ m². Disque : $\pi \times 30^2 = 900\pi \approx 2\,827$ m².
- Aire : $6\,000 + 900\pi \approx 8\,827$ m².

Réponse. a) $\approx 388,5$ m · b) $\approx 8\,827$ m².

Correction de l'exercice 8 - Le disque dans le carré

On retire l'aire du disque à celle du carré :

$$A = 8 \times 8 - \pi \times 4^2 = 64 - 16\pi$$

- $A \approx 64 - 50,27 = 13,7 \text{ cm}^2$.
- La chute représente environ $\frac{13,7}{64} \approx 21\%$ du carré : on perd un peu plus d'un cinquième du matériau.

Réponse. $64 - 16\pi \approx 13,7 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 9 - Une porte en plein cintre

Rectangle + demi-disque de diamètre 0,9 m, donc de rayon 0,45 m.

- Rectangle : $0,9 \times 2 = 1,8 \text{ m}^2$.
- Demi-disque :

$$\frac{\pi \times 0,45^2}{2} = \frac{0,2025\pi}{2} \approx 0,318 \text{ m}^2$$

- Total : $1,8 + 0,318 \approx 2,12 \text{ m}^2$.

Réponse. $\approx 2,12 \text{ m}^2$.

Correction de l'exercice 10 - Une grande pizza ou deux petites ?

On compare les **aires** (la quantité de pizza), pas les diamètres.

$$A = \pi \times r^2$$

- Grande pizza, rayon 15 cm : $\pi \times 15^2 = 225\pi \approx 707 \text{ cm}^2$.
- Deux petites, rayon 10 cm : $2 \times \pi \times 10^2 = 200\pi \approx 628 \text{ cm}^2$.
- La grande pizza est plus avantageuse (environ 79 cm^2 de plus). Intuition trompeuse : $30 < 20 + 20$, mais l'aire dépend du **carré** du rayon.

Réponse. La grande : $225\pi \approx 707 \text{ cm}^2$ contre $200\pi \approx 628 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 11 - Deux chemins en demi-cercles

Un demi-cercle de diamètre d mesure la moitié du périmètre :

$$\frac{\pi \times d}{2}$$

- Grand demi-cercle : $\frac{\pi \times 10}{2} = 5\pi \text{ cm}$.
- Chaque petit ($d = 5 \text{ cm}$) : $\frac{\pi \times 5}{2} = 2,5\pi \text{ cm}$; les deux : $5\pi \text{ cm}$.
- Les deux chemins ont **exactement la même longueur**, $5\pi \approx 15,7 \text{ cm}$. Et avec 4, 10 ou 100 petits demi-cercles, la longueur resterait la même.

Réponse. Même longueur : $5\pi \approx 15,7 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 12 - Doubler le rayon

- a) Rayon 3 cm : $P = 2\pi \times 3 = 6\pi \text{ cm}$ et $A = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.
- Rayon 6 cm : $P = 12\pi \text{ cm}$ et $A = 36\pi \text{ cm}^2$.
- b) Périmètre : $12\pi = 2 \times 6\pi$, il est multiplié par 2. Aire : $36\pi = 4 \times 9\pi$, elle est multipliée par 4.

$$\pi \times (2r)^2 = \pi \times 4 \times r^2 = 4 \times \pi r^2$$

- Le périmètre est proportionnel au rayon, pas l'aire (c'est ce qui explique l'exercice des pizzas).

Réponse. b) périmètre $\times 2$, aire $\times 4$.

Correction de l'exercice 13 - L'arroseur automatique

- a) La zone arrosée est un disque de rayon 5 m, qui touche les bords de la pelouse :

$$A = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78,5 \text{ m}^2$$

- Soit environ 79 m².
 — b) Pelouse : $10 \times 10 = 100 \text{ m}^2$. Non arrosé : $100 - 25\pi \approx 21,5 \text{ m}^2$, les quatre coins.
 — Cela fait environ 21,5 % de la pelouse : il faudrait des arroseurs d'angle pour tout couvrir.

Réponse. a) $25\pi \approx 79 \text{ m}^2$ · b) $\approx 21,5 \text{ m}^2$ (environ 21,5 %).

Correction de l'exercice 14 - La chèvre dans le pré

- a) La chèvre atteint tous les points à moins de 4 m de P : c'est un disque de rayon 4 m. Mais la clôture l'arrête : elle ne garde que la partie dans l'angle droit du pré, soit un **quart de disque**.

b) Aire :

$$A = \frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi \approx 12,6 \text{ m}^2$$

- C'est environ 21 % du pré (60 m²). Si on l'attachait au milieu d'un grand côté, elle aurait un demi-disque : $8\pi \approx 25,1 \text{ m}^2$, deux fois plus.

Réponse. a) un quart de disque de rayon 4 m · b) $4\pi \approx 12,6 \text{ m}^2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la piscine

Le demi-disque a un rayon de 2 m.

- a) Rectangle : $8 \times 4 = 32 \text{ m}^2$. Demi-disque : $\frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi \approx 6,28 \text{ m}^2$.

$$A = 32 + 2\pi \approx 38,3 \text{ m}^2$$

- b) Contour : les deux longueurs (8 + 8), le petit côté gauche (4) et le demi-cercle ($\frac{\pi \times 4}{2} = 2\pi$). Le côté de 4 m qui touche le demi-disque est intérieur : il ne compte pas.
 — $P = 8 + 8 + 4 + 2\pi = 20 + 2\pi \approx 26,3 \text{ m}$.

Réponse. a) $\approx 38,3 \text{ m}^2$ · b) $\approx 26,3 \text{ m}$.