

Plaquette 4 – Volumes : pavé, prisme droit et cylindre

Aires et volumes — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Volumes des solides droits.

- Pavé droit de dimensions L, ℓ, h :

$$V = L \times \ell \times h$$

- Prisme droit : la **base** est une des deux faces parallèles et superposables ; la **hauteur** est la longueur d'une arête latérale (la distance entre les deux bases).

$$V = A_{\text{base}} \times h$$

- Cylindre de rayon r et de hauteur h : la base est un disque.

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

- Une dimension manquante : $h = V \div A_{\text{base}}$.
- Unités : $\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm}$ donne des cm^3 ; $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 1 – Volume d'un pavé droit

Le volume d'un pavé droit est le produit de ses trois dimensions :

$$V = L \times \ell \times h = 12 \times 5 \times 4$$

- Calcul astucieux : $5 \times 4 = 20$, puis $12 \times 20 = 240$.
- $V = 240 \text{ cm}^3$.
- On peut aussi voir : aire de la base $12 \times 5 = 60 \text{ cm}^2$, multipliée par la hauteur 4 cm.

Réponse. 240 cm^3 .

Correction de l'exercice 2 – Compter les cubes

On compte par couches, sans avoir à voir les cubes cachés.

- Une couche : 4 cubes sur la longueur et 3 sur la profondeur, soit $4 \times 3 = 12$ cubes.
- Il y a 2 couches : $2 \times 12 = 24$ cubes.

$$V = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ cm}^3$$

- Un cube de 1 cm d'arête a un volume de 1 cm^3 : le volume en cm^3 est le nombre de cubes. C'est l'origine de la formule du pavé.

Réponse. 24 cubes, 24 cm^3 .

Correction de l'exercice 3 – Prisme à base triangulaire

On calcule d'abord l'aire de la base (le triangle), puis on multiplie par la hauteur du prisme (la longueur d'une arête latérale).

- Aire de la base : $\frac{5 \times 3}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$.

$$V = A_{\text{base}} \times h = 7,5 \times 10 = 75 \text{ cm}^3$$

- Piège : les deux « hauteurs » ne jouent pas le même rôle. 3 cm est la hauteur du triangle (dans la base) ; 10 cm est la hauteur du prisme.

Réponse. 75 cm³.

Correction de l'exercice 4 - Une gouttière en prisme

a) On découpe le trapèze en deux triangles par une diagonale (même hauteur 3 dm) :

$$A = \frac{6 \times 3}{2} + \frac{4 \times 3}{2} = 9 + 6 = 15 \text{ dm}^2$$

- b) Le prisme est couché : sa base est le trapèze, sa hauteur est la longueur 20 dm.
- $V = 15 \times 20 = 300 \text{ dm}^3$.
- $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$: l'auge contient 300 L.

Réponse. a) 15 dm² · b) 300 dm³, soit 300 L.

Correction de l'exercice 5 - Base connue par son aire

Peu importe la forme de la base : si l'on connaît son aire, la formule du prisme s'applique directement.

$$V = A_{\text{base}} \times h$$

- $V = 0,6 \times 17,5 = 10,5 \text{ cm}^3$.
- Calcul : $0,6 \times 17,5 = 6 \times 1,75 = 10,5$.
- Ordre de grandeur : environ 10 cm³, soit 10 mL, ce qui est bien le volume d'un petit objet.

Réponse. 10,5 cm³.

Correction de l'exercice 6 - Volume d'un cylindre

La base est un disque de rayon 3 cm :

$$V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi$$

- $V = 72\pi \approx 226 \text{ cm}^3$.
- Étapes : aire de la base $9\pi \approx 28,27 \text{ cm}^2$, multipliée par 8 cm.
- On n'arrondit qu'à la fin : arrondir π à 3 donnerait 216 cm³, une erreur de 10 cm³.

Réponse. $72\pi \approx 226 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 7 - Cylindre donné par son diamètre

Attention : la formule utilise le **rayon**, $r = 10 \div 2 = 5 \text{ cm}$.

$$V = \pi \times 5^2 \times 12 = 300\pi \approx 942 \text{ cm}^3$$

- En litres : $942 \div 1\,000 \approx 0,94 \text{ L}$.
- Piège : avec $r = 10$, on trouverait $1\,200\pi \approx 3\,770 \text{ cm}^3$, quatre fois trop.

Réponse. $300\pi \approx 942 \text{ cm}^3$, soit environ 0,94 L.

Correction de l'exercice 8 - Retrouver la hauteur d'un pavé

On part de la formule et on cherche le facteur manquant :

$$V = A_{\text{base}} \times h \quad \text{donc} \quad h = \frac{V}{A_{\text{base}}}$$

- Aire de la base : $8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$.
- $h = 360 \div 40 = 9 \text{ cm}$.
- Contrôle : $8 \times 5 \times 9 = 360$.

Réponse. 9 cm.

Correction de l'exercice 9 - La bouteille d'un litre

1 L = 1 000 cm³. On cherche h tel que $\pi \times 5^2 \times h = 1\,000$.

$$h = \frac{V}{\pi \times r^2} = \frac{1\,000}{25\pi}$$

- $h \approx 12,73$ cm, soit environ 12,7 cm au millimètre près.
- Contrôle : $25\pi \times 12,7 \approx 997,5$ cm³, presque 1 L (l'écart vient de l'arrondi).

Réponse. $h \approx 12,7$ cm.

Correction de l'exercice 10 - Lire un patron

Un pavé droit a trois paires de faces identiques : 4×3 , 4×2 et 2×3 . Ses trois dimensions sont donc 4 cm, 3 cm et 2 cm.

$$V = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ cm}^3$$

- Contrôle : en repliant, une face 4×3 est la base, les faces 4×2 et 2×3 forment les côtés de hauteur 2 cm, et l'autre face 4×3 referme le dessus.
- Aire totale du patron (surface du carton) : $2 \times (12 + 8 + 6) = 52$ cm².

Réponse. Dimensions 4 cm, 3 cm, 2 cm ; 24 cm³.

Correction de l'exercice 11 - Quel verre contient le plus ?

On calcule les deux volumes avec la formule du cylindre :

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

- Premier : $\pi \times 9 \times 10 = 90\pi \approx 283$ cm³.
- Second : $\pi \times 16 \times 6 = 96\pi \approx 302$ cm³.
- Le second, plus bas mais plus large, contient le plus. Le rayon compte « deux fois » (il est au carré), la hauteur une seule fois.

Réponse. Le second ($96\pi \approx 302$ cm³ contre $90\pi \approx 283$ cm³).

Correction de l'exercice 12 - Hauteur d'eau dans l'aquarium

L'eau forme un pavé de même base que l'aquarium ; sa hauteur est inconnue.

- 45 L = 45 dm³ = 45 000 cm³.
- Aire de la base : $50 \times 30 = 1\,500$ cm².

$$h = \frac{V}{A_{\text{base}}} = \frac{45\,000}{1\,500} = 30 \text{ cm}$$

- L'eau monte à 30 cm, il reste 10 cm sous le bord. L'aquarium plein contiendrait $1\,500 \times 40 = 60\,000$ cm³, soit 60 L.

Réponse. 30 cm.

Correction de l'exercice 13 - Le volume de la grange

La base est le pignon (le pentagone), la hauteur du prisme est la longueur 10 m.

- Aire du pignon : rectangle $6 \times 4 = 24$ m², plus triangle $\frac{6 \times 2}{2} = 6$ m², soit 30 m².

$$V = A_{\text{base}} \times h = 30 \times 10 = 300 \text{ m}^3$$

- Autre découpage : un pavé $6 \times 4 \times 10 = 240 \text{ m}^3$ surmonté d'un prisme triangulaire $6 \times 10 = 60 \text{ m}^3$; total 300 m^3 .

Réponse. 300 m^3 .

Correction de l'exercice 14 - Le tuyau en béton

C'est un prisme (un « cylindre creux ») dont la base est la couronne.

- Aire de la couronne : $\pi \times 10^2 - \pi \times 8^2 = 100\pi - 64\pi = 36\pi \text{ cm}^2$.

$$V = 36\pi \times 100 = 3\,600\pi \approx 11\,310 \text{ cm}^3$$

- Soit environ 11,3 L de béton ($11,3 \text{ dm}^3$).
- Autre méthode : grand cylindre moins le vide, $10\,000\pi - 6\,400\pi = 3\,600\pi$.

Réponse. $3\,600\pi \approx 11\,310 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la piscine en pente

a) Le trapèze a deux côtés parallèles verticaux (1 m et 2 m), distants de 12 m. Une diagonale le découpe en deux triangles de hauteur 12 m :

$$A = \frac{1 \times 12}{2} + \frac{2 \times 12}{2} = 6 + 12 = 18 \text{ m}^2$$

- b) Le prisme a pour hauteur la largeur 5 m : $V = 18 \times 5 = 90 \text{ m}^3$.
- $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$: la piscine contient 90 000 L.
- Contrôle : la profondeur moyenne est 1,5 m, et $12 \times 5 \times 1,5 = 90 \text{ m}^3$.

Réponse. a) 18 m^2 · b) 90 m^3 , soit 90 000 L.