

## Plaquette 5 - Problèmes : modéliser et prouver avec des lettres

### Expressions littérales — Cinquième

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Modéliser et prouver.

- On nomme l'inconnue (« soit  $x$  le nombre choisi ») et on traduit chaque étape par une expression.
- On **réduit** : si le résultat ne dépend plus de  $x$ , il est le même pour tous les nombres.
- Un entier **pair** s'écrit  $2k$  ; trois entiers consécutifs s'écrivent  $n, n + 1, n + 2$ .
- Un nombre de la forme  $k \times (...)$  avec  $k$  entier est un **multiple de  $k$**  :  

$$3n + 3 = 3(n + 1) \text{ est un multiple de } 3$$
- **Distributivité** pour développer et factoriser :  

$$k(a + b) = ka + kb$$
- Comparer deux expressions : tableau de valeurs, puis recherche de la valeur où elles sont égales.
- **Remonter** un programme : opérations inverses dans l'ordre inverse ( $+$   $\leftrightarrow$   $-$ ,  $\times$   $\leftrightarrow$   $\div$ ).
- Des exemples font **deviner** une propriété ; seul le calcul littéral la **prouve**.

#### Correction de l'exercice 1 - Un programme qui donne toujours 5

a)  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 8 - 3 = 5$  ;  $8 \rightarrow 16 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 13 - 8 = 5$ .

b) On note  $x$  le nombre choisi et on suit les étapes :

$$x \rightarrow 2x \rightarrow 2x + 10 \rightarrow \frac{2x + 10}{2} = x + 5 \rightarrow x + 5 - x = 5$$

(diviser  $2x + 10$  par 2, c'est diviser chaque terme par 2). Le résultat réduit est 5, sans  $x$  : le programme donne 5 **quel que soit** le nombre choisi. Les deux essais de a) le laissaient deviner ; le calcul littéral le prouve.

**Réponse.** a) 5 et 5 · b) le résultat vaut  $x + 5 - x = 5$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Programmes équivalents ?

On écrit le résultat de chaque programme pour un nombre  $x$ , puis on développe :

$$A: 3(x + 4) = 3x + 12 \quad B: 3x + 12 \quad C: 3x + 4$$

A et B ont la même forme réduite : ils donnent **toujours** le même résultat (c'est la distributivité). C diffère : pour  $x = 0$ , A donne 12 et C donne 4, un contre-exemple suffit.

**Réponse.** A et B (toujours) ; pas C.

#### Correction de l'exercice 3 - La somme de deux nombres pairs

a)  $4 + 6 = 10$  ;  $8 + 12 = 20$  ;  $14 + 2 = 16$  : les sommes sont toutes paires.

b) On additionne puis on factorise par 2 :

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

$a + b$  est un entier, donc  $2(a + b)$  est le double d'un entier : c'est un nombre **pair**. La propriété est prouvée pour tous les nombres pairs, et pas seulement pour les exemples de a).

**Réponse.** b)  $2a + 2b = 2(a + b)$ , double d'un entier.

### Correction de l'exercice 4 - Cinq entiers consécutifs

a) 25 et 60 : deux multiples de 5.

b) Les cinq entiers sont  $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$  :

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10$$

c) On factorise :  $5n + 10 = 5(n + 2)$ . C'est 5 fois un entier, donc un multiple de 5. Le quotient,  $n + 2$ , est le nombre **du milieu** :  $25 = 5 \times 5$  et  $60 = 5 \times 12$ .

**Réponse.** a) 25 et 60 · b)  $5n + 10$  · c)  $5(n + 2)$  ; quotient : le nombre du milieu.

### Correction de l'exercice 5 - Le tour de magie

a) Avec 7 :  $10 \rightarrow 20 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 1$ . Avec 20 :  $23 \rightarrow 46 \rightarrow 42 \rightarrow 21 \rightarrow 1$ .

b) On note  $x$  le nombre pensé et on réduit à chaque étape :

$$x \rightarrow x + 3 \rightarrow 2(x + 3) = 2x + 6 \rightarrow 2x + 2 \rightarrow x + 1 \rightarrow x + 1 - x = 1$$

Le nombre choisi disparaît à la dernière étape : le résultat est 1 pour tout nombre. C'est pour cela que le magicien peut l'annoncer sans connaître le nombre.

**Réponse.** Le résultat vaut  $x + 1 - x = 1$  pour tout  $x$ .

### Correction de l'exercice 6 - Carte de cinéma ou plein tarif ?

a) On exprime chaque prix en fonction de  $n$  :

$$\text{plein tarif} = 9,5n \quad \text{avec carte} = 20 + 6n$$

b) 5 films : 47,50 € contre  $20 + 30 = 50$  €. 6 films : 57 € contre  $20 + 36 = 56$  €.

c) À chaque film, la carte fait économiser  $9,50 - 6 = 3,50$  € ; il faut rembourser les 20 € de la carte. Après 5 films, on a économisé 17,50 € (pas assez) ; après 6 films, 21 €. La carte est avantageuse **à partir de 6 films**, comme le confirment les calculs de b).

**Réponse.** a)  $9,5n$  et  $20 + 6n$  · b) 47,50 et 50 € ; 57 et 56 € · c) à partir de 6 films.

### Correction de l'exercice 7 - Deux périmètres égaux

a) On développe chaque périmètre :

$$P_{\text{triangle}} = 3(x + 2) = 3x + 6 \quad P_{\text{carré}} = 4(x + 1) = 4x + 4$$

b) On substitue :

| $x$      | 1 | 2  | 3  | 4  |
|----------|---|----|----|----|
| Triangle | 9 | 12 | 15 | 18 |
| Carré    | 8 | 12 | 16 | 20 |

c) Pour  $x = 2$ , les deux périmètres valent 12 cm : le triangle a des côtés de 4 cm, le carré de 3 cm. Au-delà, le carré a le plus grand périmètre, car son périmètre augmente de 4 quand  $x$  augmente de 1, contre 3 pour le triangle.

**Réponse.** a)  $3x + 6$  et  $4x + 4$  · c)  $x = 2$  (12 cm).

### Correction de l'exercice 8 - Le motif en croix

a) Il y a 1 carreau central et 4 branches de  $n$  carreaux :

$$\text{carreaux} = 4n + 1$$

Contrôle :  $n = 1, 2, 3$  donnent 5, 9, 13.

b)  $4 \times 10 + 1 = 41$  carreaux.

c) On cherche  $n$  tel que  $4n + 1 = 81$  ; on remonte :  $81 - 1 = 80$ ,  $80 \div 4 = 20$ . C'est l'étape 20. Vérification :  $4 \times 20 + 1 = 81$ .

**Réponse.** a)  $4n + 1$  · b) 41 · c) étape 20.

### Correction de l'exercice 9 - Une énigme à remonter

a) Le nombre multiplié par 3, augmenté de 7, donne 40 :

$$3x + 7 = 40$$

b) On remonte en faisant les opérations inverses, dans l'ordre inverse :

$$40 \xrightarrow{-7} 33 \xrightarrow{\div 3} 11$$

Le nombre est 11.

c)  $11 \times 3 = 33$  et  $33 + 7 = 40$ . Piège : remonter dans le mauvais ordre ( $40 \div 3$  puis  $-7$ ) ne donne pas un entier et n'annule pas les opérations.

**Réponse.** a)  $3x + 7 = 40$  · b) et c) 11.

### Correction de l'exercice 10 - Le coût des flyers

a) Prix = frais fixes + prix unitaire  $\times$  nombre :

$$\text{prix} = 50 + 0,8n$$

b)  $n = 200$  :  $50 + 0,8 \times 200 = 50 + 160 = 210$  €. Prix de revient d'un flyer :  $210 \div 200 = 1,05$  €.

c) Les 50 € de frais fixes sont partagés entre tous les flyers : avec 200 flyers, cela ajoute 0,25 € par flyer ; avec 1 000 flyers, 0,05 € seulement ( $50 + 800 = 850$  €, soit 0,85 € le flyer). Le prix n'est pas proportionnel au nombre de flyers.

**Réponse.** a)  $50 + 0,8n$  · b) 210 € ; 1,05 € · c) les frais fixes se répartissent.

### Correction de l'exercice 11 - Le nombre qui finit par 0

a)  $3 \rightarrow 15 \rightarrow 22 \rightarrow 44 \rightarrow 30$  ;  $12 \rightarrow 60 \rightarrow 67 \rightarrow 134 \rightarrow 120$ . On obtient le nombre de départ suivi d'un 0.

b) Avec  $x$  :

$$x \rightarrow 5x \rightarrow 5x + 7 \rightarrow 2(5x + 7) = 10x + 14 \rightarrow 10x + 14 - 14 = 10x$$

Le résultat est  $10x$ , c'est-à-dire le nombre choisi multiplié par 10 : pour un entier, cela revient à écrire un 0 à sa droite.

**Réponse.** Le résultat vaut  $10x$  : le nombre suivi d'un 0.

### Correction de l'exercice 12 - L'âge du père et du fils

a) Dans 10 ans : le fils aura  $x + 10$  ans, le père  $3x + 10$  ans. La somme vaut

$$(x + 10) + (3x + 10) = 4x + 20 = 4(x + 5)$$

b) Le père a 42 ans, donc le fils en a  $42 \div 3 = 14$  ( $x = 14$ ).

— Directement : dans 10 ans, 24 et 52 ans, soit  $24 + 52 = 76$ .

— Avec la formule :  $4(14 + 5) = 4 \times 19 = 76$ .

La forme factorisée montre au passage que cette somme est toujours un multiple de 4.

**Réponse.** a)  $4x + 20 = 4(x + 5)$  · b) 76 ans.

### Correction de l'exercice 13 - Deux chemins

a) On additionne les morceaux de A, on développe B :

$$A: x + (x + 4) + 6 = 2x + 10 \quad B: 2(x + 5) = 2x + 10$$

b) Les deux longueurs sont égales **quelle que soit** la valeur de  $x$  : aucun chemin n'est plus court. Par exemple, pour  $x = 3$ , les deux chemins mesurent 16 centaines de mètres, soit 1,6 km. Sami peut choisir le plus agréable !

**Réponse.** a)  $2x + 10$  pour les deux · b) ils ont la même longueur.

### Correction de l'exercice 14 - Carré et rectangle

a) On substitue dans les formules d'aire,  $A_{\text{carré}} = (x + 1) \times (x + 1)$  et  $A_{\text{rectangle}} = x(x + 2)$  :

| $x$       | 1 | 2 | 3  | 4  |
|-----------|---|---|----|----|
| Carré     | 4 | 9 | 16 | 25 |
| Rectangle | 3 | 8 | 15 | 24 |

Le rectangle a toujours une aire inférieure de 1 à celle du carré.

b) Partons du carré de côté  $x + 1$ . On retire une bande de  $1 \times (x + 1)$  en haut : il reste un rectangle  $x + 1$  sur  $x$ . On ajoute une bande de  $1 \times x$  à droite : on obtient le rectangle  $x + 2$  sur  $x$ . On a retiré  $x + 1$  et ajouté  $x$ , soit une perte de

$$(x + 1) - x = 1$$

pour toute valeur de  $x$ .

**Réponse.** a) l'aire du rectangle vaut toujours 1 de moins · b) on retire  $x + 1$  et on ajoute  $x$ .

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

On réduit, on développe ou on cherche un contre-exemple :

$$3(x + 1) = 3x + 3 \quad n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$$

a) **Faux** :  $2x + 3x = 5x$  ; pour  $x = 1$ ,  $5x^2$  et  $5x$  valent 5 tous les deux, mais pour  $x = 2$ ,  $10 \neq 20$ .

b) **Vrai** : c'est la distributivité.

c) **Faux** : pour  $x = 0,5$ ,  $x^2 = 0,25 < 0,5$  (et pour  $x = 1$ , ils sont égaux).

d) **Vrai** :  $4x - 1x = 3x$ .

e) **Vrai** : la somme vaut  $3(n + 1)$ , trois fois un entier.

**Réponse.** a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai · e) vrai.