

Plaquette 4 - Réduire, développer, factoriser

Expressions littérales — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Transformer une expression.

- **Réduire** : on additionne les coefficients des termes **semblables** (même partie littérale) :

$$ax + bx = (a + b)x \quad 5x + 3 + 2x + 8 = 7x + 11$$

- On ne peut pas réduire $3x + 2$, ni $x^2 + x$: ces termes ne sont pas semblables.

- **Produits** : $3 \times 4x = 12x$; $2x \times 5x = 10x^2$.

- **Développer** (distributivité) :

$$k(a + b) = ka + kb \quad k(a - b) = ka - kb$$

- **Factoriser** : c'est la même égalité lue de droite à gauche ; on cherche le **facteur commun** : $8x + 12 = 4 \times 2x + 4 \times 3 = 4(2x + 3)$.

- Calcul mental : $7 \times 102 = 7 \times 100 + 7 \times 2$; $17 \times 23 + 17 \times 77 = 17 \times 100$.

- **Contrôle** : on remplace x par une valeur simple (par exemple 1 ou 2) dans l'expression de départ et dans le résultat ; on doit trouver le même nombre.

Correction de l'exercice 1 - Réduire des sommes

Les termes sont semblables : on additionne (ou soustrait) leurs coefficients, en se souvenant que $x = 1x$:

$$ax + bx = (a + b)x$$

a) $4x + 7x = 11x$.

b) $12a - 5a = 7a$.

c) $x + x + x = 1x + 1x + 1x = 3x$.

d) $3y + y - 2y = (3 + 1 - 2)y = 2y$.

Contrôle de d) pour $y = 5$: $15 + 5 - 10 = 10$ et $2 \times 5 = 10$.

Réponse. a) $11x$ · b) $7a$ · c) $3x$ · d) $2y$.

Correction de l'exercice 2 - Regrouper les termes semblables

On regroupe les termes de même nature, puis on réduit chaque groupe :

$$5x + 3 + 2x + 8 = (5x + 2x) + (3 + 8) = 7x + 11$$

b) $(4x + x) + (9 - 2) = 5x + 7$.

c) $(6a + a) + (2b - b) = 7a + b$.

On déplace un terme avec son signe : dans b), le « -2 » reste une soustraction. Contrôle de c) pour $a = 1$ et $b = 2$: $6 + 4 + 1 - 2 = 9$ et $7 + 2 = 9$.

Réponse. a) $7x + 11$ · b) $5x + 7$ · c) $7a + b$.

Correction de l'exercice 3 - Sommes et produits

Une **somme** ne se réduit que si les termes sont semblables ; un **produit**, lui, se simplifie toujours en multipliant les nombres entre eux et les lettres entre elles :

$$2x \times 5x = 2 \times 5 \times x \times x = 10x^2$$

- a) Impossible : $3x$ et 2 ne sont pas semblables.
- b) $3x \times 2 = 6x$.
- c) $2x + 5x = 7x$.
- e) Impossible : x^2 et x ne sont pas semblables.

Piège de a) : $3x + 2 \neq 5x$; pour $x = 2$, $3x + 2 = 8$ mais $5x = 10$.

Réponse. a) non · b) $6x$ · c) $7x$ · d) $10x^2$ · e) non.

Correction de l'exercice 4 - Développer

On multiplie le facteur par **chaque** terme de la parenthèse :

$$k(a + b) = ka + kb \quad k(a - b) = ka - kb$$

- a) $4 \times x + 4 \times 2 = 4x + 8$.
- b) $6 \times 3 - 6 \times x = 18 - 6x$.
- c) $ab + ac$.
- d) $2x \times x + 2x \times 5 = 2x^2 + 10x$.

Contrôle de d) pour $x = 1$: $2 \times 1 \times 6 = 12$ et $2 + 10 = 12$.

Réponse. a) $4x + 8$ · b) $18 - 6x$ · c) $ab + ac$ · d) $2x^2 + 10x$.

Correction de l'exercice 5 - Développer puis réduire

On développe chaque produit, puis on regroupe les termes semblables :

$$3(2x + 1) + 4x = 6x + 3 + 4x = 10x + 3$$

- b) $5x + 10 - 3 = 5x + 7$.
- c) $2x + 8 + 3x - 3 = 5x + 5$.

Contrôle de c) pour $x = 2$: $2 \times 6 + 3 \times 1 = 15$ et $5 \times 2 + 5 = 15$.

Réponse. a) $10x + 3$ · b) $5x + 7$ · c) $5x + 5$.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser

On cherche un facteur commun à tous les termes, puis on applique la distributivité à l'envers :

$$ka + kb = k(a + b)$$

- a) $8x + 12 = 4 \times 2x + 4 \times 3 = 4(2x + 3)$.
- b) $15a - 10 = 5 \times 3a - 5 \times 2 = 5(3a - 2)$.
- c) $x^2 + 5x = x \times x + x \times 5 = x(x + 5)$.
- d) $9x + 9 = 9 \times x + 9 \times 1 = 9(x + 1)$.

En d), il ne faut pas oublier le « 1 » : $9 = 9 \times 1$. Contrôle : on redéveloppe chaque résultat.

Réponse. a) $4(2x + 3)$ · b) $5(3a - 2)$ · c) $x(x + 5)$ · d) $9(x + 1)$.

Correction de l'exercice 7 - Calcul mental en développant

On écrit un facteur comme une somme ou une différence simple, puis on développe :

$$k(a + b) = ka + kb$$

- a) $7 \times (100 + 2) = 700 + 14 = 714$.

b) $25 \times (100 - 1) = 2\,500 - 25 = 2\,475$.

c) $13 \times (10 + 1) = 130 + 13 = 143$.

d) $8 \times (3 + 0,5) = 24 + 4 = 28$.

La distributivité n'est pas qu'un outil pour les lettres : c'est aussi la base du calcul mental.

Réponse. a) 714 · b) 2 475 · c) 143 · d) 28.

Correction de l'exercice 8 - Calcul mental en factorisant

On repère le facteur commun et on factorise :

$$ka + kb = k(a + b)$$

a) $17 \times (23 + 77) = 17 \times 100 = 1\,700$.

b) $4,5 \times (8 + 2) = 4,5 \times 10 = 45$.

c) $36 \times (7 - 2) = 36 \times 5 = 180$.

Sans factoriser, a) demanderait deux multiplications difficiles (391 et 1 309), puis une addition.

Réponse. a) 1 700 · b) 45 · c) 180.

Correction de l'exercice 9 - L'aire en deux morceaux

a) **Première façon** : le grand rectangle a pour dimensions 5 et $x + 3$, donc

$$A = 5(x + 3)$$

Deuxième façon : on additionne les aires des deux petits rectangles, $5 \times x = 5x$ et $5 \times 3 = 15$, donc $A = 5x + 15$.

b) Les deux calculs donnent la même aire, donc $5(x + 3) = 5x + 15$: c'est la **distributivité**. Elle est vraie pour toute longueur x , comme le montre la figure.

Réponse. a) $5(x + 3)$ et $5x + 15$ · b) la distributivité.

Correction de l'exercice 10 - Trouver les erreurs

On rappelle les règles, puis on contrôle avec une valeur ($x = 1$ par exemple) :

$$k(a + b) = ka + kb \quad ax + bx = (a + b)x$$

a) Le 3 doit multiplier **aussi** le 4 : $3x + 12$ (pour $x = 1$: 15, pas 7).

b) Même oubli : $2x - 10$.

c) On additionne des x , on n'en multiplie pas : $4x + 3x = 7x$ (et non $7x^2$).

d) 5 et $2x$ ne sont pas semblables : $5 + 2x$ ne se réduit pas (pour $x = 1$: 7, mais pour $x = 2$: $9 \neq 14$).

Réponse. a) $3x + 12$ · b) $2x - 10$ · c) $7x$ · d) non réductible.

Correction de l'exercice 11 - Réunir les expressions égales

On écrit chaque expression sous forme développée et réduite :

$$2(x + 3) = 2x + 6 \quad x + x + 3 = 2x + 3$$

— **Premier groupe** $(2x + 6)$: $2(x + 3)$; $2x + 6$; $2 \times x + 2 \times 3$.

— **Second groupe** $(2x + 3)$: $2x + 3$; $x + x + 3$; $3 + 2x$ (l'ordre des termes d'une somme ne compte pas).

Contrôle avec $x = 1$: le premier groupe vaut 8, le second 5.

Réponse. $\{2(x + 3); 2x + 6; 2 \times x + 2 \times 3\}$ et $\{2x + 3; x + x + 3; 3 + 2x\}$.

Correction de l'exercice 12 - Deux expressions toujours égales ?

a) On développe puis on réduit chaque expression :

$$A = 4x + 4 - 2x = 2x + 4 \quad B = 2x + 4$$

b) Les formes réduites sont identiques : $A = B$ pour **tous** les nombres x .

Contrôle avec $x = 3$: $A = 4 \times 3 - 2 = 10$ et $B = 2 \times 3 = 6$. Le calcul littéral prouve ici une égalité que des tests ne pourraient que suggérer.

Réponse. a) $A = 2x + 4$ et $B = 2x + 4$ · b) égales pour tout x .

Correction de l'exercice 13 - Le cadre photo

a) Le cadre ajoute 2 cm de chaque côté, soit 4 cm par dimension : 14 cm sur $x + 4$ cm.

b) On applique la formule du périmètre du rectangle, $P = 2(L + l)$:

$$P_{\text{photo}} = 2(10 + x) = 2x + 20 \quad P_{\text{cadre}} = 2(14 + x + 4) = 2(x + 18) = 2x + 36$$

c) $(2x + 36) - (2x + 20) = 16$ cm. L'écart ne dépend pas de x : quelle que soit la hauteur de la photo, le tour extérieur du cadre mesure 16 cm de plus.

Réponse. a) 14 et $x + 4$ · b) $2x + 20$ et $2x + 36$ · c) 16 cm.

Correction de l'exercice 14 - Réduire un périmètre

a) Le périmètre est la somme des côtés ; on regroupe les x , puis les nombres :

$$P = 2x + (x + 1) + 3x + (x + 1) = 7x + 2$$

b) $x = 2,5$: $P = 7 \times 2,5 + 2 = 17,5 + 2 = 19,5$ cm. Contrôle avec les côtés : $5 + 3,5 + 7,5 + 3,5 = 19,5$.

c) On cherche x tel que $7x + 2 = 30$. On remonte le calcul : $30 - 2 = 28$, puis $28 \div 7 = 4$. Vérification : $7 \times 4 + 2 = 30$; les côtés mesurent alors 8, 5, 12 et 5 cm.

Réponse. a) $7x + 2$ · b) 19,5 cm · c) $x = 4$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois transformations

a) On développe chaque produit, puis on regroupe les termes semblables :

$$E = 6x + 12 + 2x + 2 = 8x + 14$$

b) Le facteur commun est 2 : $8x + 14 = 2 \times 4x + 2 \times 7 = 2(4x + 7)$.

c) Pour $x = 5$:

— départ : $3 \times 14 + 2 \times 6 = 42 + 12 = 54$;

— réduite : $8 \times 5 + 14 = 54$;

— factorisée : $2 \times 27 = 54$.

Les trois formes donnent bien le même nombre : elles sont égales, seule leur écriture change.

Réponse. a) $8x + 14$ · b) $2(4x + 7)$ · c) 54.