

Plaquette 3 - Calculer la valeur d'une expression, tester une égalité

Expressions littérales — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Substituer et tester.

- Pour calculer une expression, on remplace la lettre par le nombre, en **rétablissant les signes** $\times$:

$$3x + 5 \text{ pour } x = 2: 3 \times 2 + 5 = 11$$

- Priorités : parenthèses, puis puissances (x^2), puis $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$.
- $x^2 = x \times x$; $3x^2 = 3 \times x^2$, à ne pas confondre avec $(3x)^2$.
- **Tester une égalité** pour une valeur : on calcule chaque membre **séparément**, puis on compare.
- Un nombre est **solution** d'une égalité contenant x si l'égalité est vraie quand on remplace x par ce nombre.
- Une égalité fausse pour **une** valeur (un contre-exemple) n'est pas toujours vraie. Une égalité vraie pour plusieurs valeurs n'est pas forcément toujours vraie : pour le **prouver**, on transforme une expression en l'autre (développer, réduire).

Correction de l'exercice 1 - Trois valeurs de x

On remplace x par le nombre en rétablissant le signe $\times$, puis on multiplie avant de soustraire :

$$A = 5 \times x - 3$$

- a) $5 \times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$.
- b) $5 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$.
- c) $5 \times 1,5 - 3 = 7,5 - 3 = 4,5$.

En b), le résultat est un nombre négatif : $0 - 3 = -3$. Piège : écrire « $52 - 3$ » en collant le 5 et le 2 ; le signe $\times$ caché doit toujours être rétabli.

Réponse. a) 7 · b) -3 · c) 4,5.

Correction de l'exercice 2 - Un carré dans l'expression

Priorités : le carré d'abord, puis la multiplication, puis l'addition.

$$B = 2 \times x^2 + 1$$

- a) $x = 3 : 2 \times 3^2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$.
- $x = 0,5 : 2 \times 0,5^2 + 1 = 2 \times 0,25 + 1 = 1,5$.
- b) Il a calculé $(2 \times 3)^2 + 1 = 36 + 1 = 37$: il a mis au carré le produit $2x$ au lieu de x seul. Or $2x^2$ signifie $2 \times x^2$; seul x est au carré.

Réponse. a) 19 et 1,5 · b) il a calculé $(2x)^2$.

Correction de l'exercice 3 - Deux lettres

On remplace **chaque** lettre par sa valeur :

$$ab = a \times b$$

a) $C = 3 \times 4 + 2 \times 5 = 12 + 10 = 22$.

b) $D = 4 \times 5 - 4 = 20 - 4 = 16$.

c) $E = 2 \times (4 + 5) = 2 \times 9 = 18$.

Piège de b) : ab n'est pas le nombre « 45 » ; c'est le produit 4×5 . Contrôle de c) par le développement : $2a + 2b = 8 + 10 = 18$.

Réponse. a) 22 · b) 16 · c) 18.

Correction de l'exercice 4 - Un tableau de valeurs

Pour chaque colonne, on calcule le carré, puis le double, puis on additionne et soustrait de gauche à droite :

$$x = 3: \quad 3^2 - 2 \times 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$$

— $x = 0 : 0 - 0 + 3 = 3$; $x = 1 : 1 - 2 + 3 = 2$; $x = 2 : 4 - 4 + 3 = 3$; $x = 4 : 16 - 8 + 3 = 11$.

x	0	1	2	3	4
$x^2 - 2x + 3$	3	2	3	6	11

Dans le tableau, l'expression est la plus petite pour $x = 1$ (elle vaut 2).

Réponse. 3 ; 2 ; 3 ; 6 ; 11 — minimum pour $x = 1$.

Correction de l'exercice 5 - Appliquer une formule

On remplace r par sa valeur dans la formule :

$$P = 2 \times \pi \times r$$

a) $P \approx 2 \times 3,14 \times 5 = 31,4$ cm.

b) Un tour : $P \approx 2 \times 3,14 \times 35 = 219,8$ cm. En 100 tours : $219,8 \times 100 = 21\,980$ cm, soit environ 219,8 m.

Astuce de calcul : $2 \times 35 = 70$, puis $70 \times 3,14 = 219,8$. Les résultats sont des valeurs approchées, car 3,14 est une valeur approchée de π .

Réponse. a) environ 31,4 cm · b) environ 219,8 cm, puis 219,8 m.

Correction de l'exercice 6 - Est-ce une solution ?

On teste chaque nombre en calculant les deux membres **séparément** :

$$\text{membre de gauche: } 4x - 7 \quad \text{membre de droite: } 2x + 5$$

a) $x = 3$: à gauche $4 \times 3 - 7 = 5$; à droite $2 \times 3 + 5 = 11$. Comme $5 \neq 11$, 3 n'est **pas** solution.

b) $x = 6$: à gauche $4 \times 6 - 7 = 17$; à droite $2 \times 6 + 5 = 17$. Les deux membres sont égaux : 6 **est** solution.

Une égalité contenant une lettre peut être vraie pour certaines valeurs et fausse pour d'autres.

Réponse. a) non ($5 \neq 11$) · b) oui ($17 = 17$).

Correction de l'exercice 7 - Un contre-exemple suffit

Pour montrer qu'une égalité est **fausse**, il suffit d'une valeur pour laquelle les deux

membres différents :

un contre-exemple $\Rightarrow$ l'égalité n'est pas toujours vraie

- a) $x = 3 : 3 + 3 = 6$ mais $3^2 = 9$. Fausse ($x + x = 2x$).
- b) $x = 1 : 3 \times 2 = 6$ mais $3 \times 1 + 1 = 4$. Fausse ($3(x + 1) = 3x + 3$).
- c) $a = 1, b = 2 : (1 + 2)^2 = 9$ mais $1 + 4 = 5$. Fausse.

Attention : a) est vraie pour $x = 2$ ($2 + 2 = 4 = 2^2$) ; tomber sur une valeur qui « marche » ne prouve rien.

Réponse. Les trois sont fausses (contre-exemples $x = 3$; $x = 1$; $a = 1, b = 2$).

Correction de l'exercice 8 - Des exemples ne suffisent pas

a) On calcule les deux membres :

- $x = 0 : 2 \times 3 = 6$ et $0 + 6 = 6$;
- $x = 1 : 2 \times 4 = 8$ et $2 + 6 = 8$;
- $x = 5 : 2 \times 8 = 16$ et $10 + 6 = 16$.

b) Non : trois exemples ne couvrent pas tous les nombres. Pour prouver l'égalité, on transforme le membre de gauche avec la distributivité :

$$2(x + 3) = 2 \times x + 2 \times 3 = 2x + 6$$

Cette transformation est valable pour **n'importe quel** x : l'égalité est bien toujours vraie.

Réponse. a) vraie les trois fois · b) non ; on développe $2(x + 3)$.

Correction de l'exercice 9 - Une conjecture sur les entiers

a) On substitue chaque valeur :

$$n = 3: 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$

Pour $n = 1$ à $5 : 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30$.

b) Tous ces résultats sont pairs : on **conjecture** que $n^2 + n$ est toujours pair.

c) $n^2 + n = n \times n + n \times 1 = n(n + 1)$ est le produit de deux entiers **consécutifs**. Parmi deux entiers consécutifs, l'un est forcément pair ; leur produit est donc pair. La conjecture est prouvée pour tous les entiers.

Réponse. a) $2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30$ · b) toujours pair · c) produit de deux consécutifs.

Correction de l'exercice 10 - Qui a raison ?

a) La puissance est prioritaire sur la multiplication : dans $3x^2$, seul x est au carré.

$$3x^2 = 3 \times x^2 = 3 \times 4 = 12$$

Léa a raison. Tom a calculé $(3 \times 2)^2 = 6^2 = 36$, c'est-à-dire $(3x)^2$.

b) Pour $x = 5 : 3x^2 = 3 \times 25 = 75$ et $(3x)^2 = 15^2 = 225$. Les deux expressions sont très différentes : $(3x)^2 = 9x^2$, trois fois plus que $3x^2$.

Réponse. a) Léa (12) · b) 75 et 225.

Correction de l'exercice 11 - Programme ou expression ?

a) On compare le programme et l'expression :

- $x = 1$: programme $1 \times 4 + 2 = 6$; expression $4(1 + 2) = 12$.
- $x = 3$: programme $3 \times 4 + 2 = 14$; expression $4(3 + 2) = 20$.

b) Le test donne des résultats différents : l'expression proposée est **fausse**. Le programme multiplie d'abord, puis ajoute :

$$4 \times x + 2 = 4x + 2$$

$4(x + 2)$ correspond au programme « ajouter 2, puis multiplier par 4 ».

Réponse. a) $6 \neq 12$ et $14 \neq 20$ · b) fausse ; c'est $4x + 2$.

Correction de l'exercice 12 - Avec des nombres relatifs

On remplace x par -2 , **entre parenthèses** pour ne pas se tromper de signe :

$$10 - x = 10 - (-2) = 10 + 2 = 12$$

a) $(-2) + 7 = 5$.

b) Soustraire -2 , c'est ajouter 2 : 12.

c) $(-2) - 3 = -5$.

d) $(-2) + (-2) + 5 = -4 + 5 = 1$.

Piège de b) : écrire $10 - 2 = 8$ oublie le signe de x . Contrôle de d) : $x + x + 5 = 2x + 5$; on retrouve 1 en ajoutant 5 au double de -2 , qui vaut -4 .

Réponse. a) 5 · b) 12 · c) -5 · d) 1.

Correction de l'exercice 13 - Degrés Celsius et Fahrenheit

a) On remplace C dans la formule :

$$F = 1,8 \times C + 32$$

— $0\text{ }^{\circ}\text{C}$: $1,8 \times 0 + 32 = 32\text{ }^{\circ}\text{F}$ (l'eau gèle).

— $100\text{ }^{\circ}\text{C}$: $180 + 32 = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$ (l'eau bout).

— $37\text{ }^{\circ}\text{C}$: $1,8 \times 37 + 32 = 66,6 + 32 = 98,6\text{ }^{\circ}\text{F}$ (température du corps).

b) On fait les opérations inverses dans l'ordre inverse : $68 - 32 = 36$, puis $36 \div 1,8 = 20$. Il fait $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Contrôle : $1,8 \times 20 + 32 = 68$.

Réponse. a) $32\text{ }^{\circ}\text{F}$; $212\text{ }^{\circ}\text{F}$; $98,6\text{ }^{\circ}\text{F}$ · b) $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Correction de l'exercice 14 - Chercher la solution par essais

On calcule le membre de gauche et on le compare à 25 :

$$3x + 4 \stackrel{?}{=} 25$$

a) $x = 5$: $3 \times 5 + 4 = 19$, trop petit. $x = 8$: $3 \times 8 + 4 = 28$, trop grand. Comme $3x + 4$ augmente quand x augmente, le nombre cherché est entre 5 et 8.

b) On essaie $x = 6$: 22, encore trop petit. $x = 7$: $3 \times 7 + 4 = 25$. Le nombre cherché est 7. On pouvait aussi remonter le calcul : $25 - 4 = 21$, puis $21 \div 3 = 7$.

Réponse. a) 19 et 28 ; plus grand que 5 · b) $x = 7$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : comparer deux expressions

a) On substitue chaque valeur dans les deux expressions, par exemple pour $x = 3$:

$$A = 2 \times 3 + 10 = 16 \quad B = 4 \times 3 + 2 = 14$$

x	0	1	2	3	4	5
A	10	12	14	16	18	20
B	2	6	10	14	18	22

b) Pour $x = 4$: $A = B = 18$ (4 est solution de $2x + 10 = 4x + 2$).

c) $A > B$ pour $x = 0, 1, 2, 3$. Au-delà de 4, B l'emporte : B augmente de 4 à chaque pas, A seulement de 2.

Réponse. b) $x = 4$ · c) pour 0, 1, 2, 3.