

Plaquette 5 - Problèmes : modéliser et prouver avec des lettres

Expressions littérales — Cinquième

Exercices

Méthode

Le calcul littéral devient un outil de **preuve** : on traduit un programme, un tarif ou une figure par une expression, on la réduit, et l'on peut alors affirmer un résultat **pour tous les nombres** (« le programme donne toujours 5 », « la somme est toujours un multiple de 3 »). On l'utilise aussi pour comparer deux offres et pour résoudre une énigme en remontant les calculs.

Exercice 1 - Un programme qui donne toujours 5

Programme : « choisir un nombre ; le multiplier par 2 ; ajouter 10 ; diviser par 2 ; soustraire le nombre choisi ».

- Appliquer le programme à 3, puis à 8.
- Prouver que le résultat est toujours le même.

Exercice 2 - Programmes équivalents ?

On compare trois programmes :

- A : « ajouter 4, puis multiplier par 3 » ;
- B : « multiplier par 3, puis ajouter 12 » ;
- C : « multiplier par 3, puis ajouter 4 ».

Lesquels donnent toujours le même résultat ? Prouver.

Exercice 3 - La somme de deux nombres pairs

- Calculer quelques sommes de deux nombres pairs. Que remarque-t-on ?
- Un nombre pair s'écrit $2 \times$ un entier. On note $2a$ et $2b$ deux nombres pairs. Prouver que leur somme est paire.

Exercice 4 - Cinq entiers consécutifs

- Calculer $3 + 4 + 5 + 6 + 7$ et $10 + 11 + 12 + 13 + 14$.
- En notant n le plus petit, exprimer la somme de cinq entiers consécutifs et la réduire.
- Prouver que cette somme est toujours un multiple de 5. Quel est le quotient ?

Exercice 5 - Le tour de magie

Un magicien dit : « Pense à un nombre. Ajoute 3. Double le résultat. Retire 4. Divise par 2. Retire le nombre de départ. Tu obtiens 1 ! »

- Tester avec deux nombres.
- Expliquer le tour.

Exercice 6 - Carte de cinéma ou plein tarif ?

Au cinéma, la place coûte 9,50 €. On peut aussi acheter une carte annuelle à 20 €, puis payer chaque place 6 €.

- Exprimer le prix payé pour n films dans chaque cas.
- Calculer les deux prix pour 5 films et pour 6 films.
- À partir de combien de films la carte est-elle avantageuse ?

Exercice 7 - Deux périmètres égaux

Un triangle équilatéral a des côtés de $x + 2$ cm ; un carré a des côtés de $x + 1$ cm.

- Exprimer le périmètre de chaque figure en fonction de x , puis réduire.
- Compléter un tableau des deux périmètres pour $x = 1, 2, 3, 4$.
- Pour quelle valeur de x les deux périmètres sont-ils égaux ?

Exercice 8 - Le motif en croix

On construit des croix avec des carreaux : un carreau au centre, et quatre branches de même longueur. À l'étape 1, chaque branche a 1 carreau (5 carreaux en tout) ; à l'étape 2, chaque branche en a 2 (9 carreaux) ; à l'étape 3, 3 (13 carreaux).

- Exprimer le nombre de carreaux à l'étape n .
- Combien de carreaux à l'étape 10 ?
- Quelle étape utilise exactement 81 carreaux ?

Exercice 9 - Une énigme à remonter

« Je pense à un nombre. Je le multiplie par 3, j'ajoute 7 et j'obtiens 40. »

- Écrire l'égalité vérifiée par le nombre x .
- Trouver le nombre en remontant les calculs.
- Vérifier.

Exercice 10 - Le coût des flyers

Une imprimerie facture 50 € de frais de mise en page, puis 0,80 € par flyer imprimé.

- Exprimer le prix de n flyers.
- Calculer le prix de 200 flyers, puis le prix de revient d'un flyer.
- Pourquoi le prix d'un flyer diminue-t-il quand on en commande plus ?

Exercice 11 - Le nombre qui finit par 0

Programme : « choisir un nombre entier ; le multiplier par 5 ; ajouter 7 ; doubler ; retirer 14 ».

- Tester avec 3, puis avec 12. Que remarque-t-on ?
- Prouver cette remarque.

Exercice 12 - L'âge du père et du fils

Un père a trois fois l'âge de son fils, qui a x ans.

- Exprimer, en fonction de x , leurs âges dans 10 ans, puis la somme de ces deux âges ; la factoriser.
- Aujourd'hui, le père a 42 ans. Calculer la somme de leurs âges dans 10 ans de deux façons.

Exercice 13 - Deux chemins

Pour aller de la maison à l'école, Sami peut suivre deux chemins (longueurs en centaines de mètres) :

- chemin A : x , puis $x + 4$, puis 6 ;
 - chemin B : deux fois un trajet de $x + 5$.
- Exprimer la longueur de chaque chemin et réduire.
 - Quel chemin est le plus court ?

Exercice 14 - Carré et rectangle

Un carré a pour côté $x + 1$. Un rectangle a pour dimensions x et $x + 2$.

- Calculer l'aire de chacun pour $x = 1, 2, 3, 4$. Que remarque-t-on ?
- Le rectangle s'obtient à partir du carré en retirant une bande de largeur 1 sur un côté et en ajoutant une bande de largeur 1 sur l'autre. Expliquer la remarque de a).

Exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant par un calcul ou un contre-exemple.

- $2x + 3x = 5x^2$.
- $3(x + 1) = 3x + 3$ pour tout nombre x .
- x^2 est toujours plus grand que x .
- $4x - x = 3x$.
- La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.