Plaquette 1 – Simplifier, comparer et additionner des fractions

Opérations sur les fractions — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fractions égales (pour $k \neq 0$) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

Comparer : on écrit les deux fractions avec le **même dénominateur**, puis on compare les numérateurs.

Additionner, soustraire : il faut le **même dénominateur** ; on garde le dénominateur et on additionne les numérateurs.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Si un dénominateur est un multiple de l'autre, on transforme seulement la fraction au plus petit dénominateur.

Fraction par un entier : on multiplie le numérateur :

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b}$$

Fraction d'une quantité : $\frac{a}{b}$ de N, c'est $N \div b \times a$.

Priorités : parenthèses, puis multiplications, puis additions et soustractions.

Correction de l'exercice 1 – Simplifier

On divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre (un diviseur commun), le plus grand possible pour aller vite.

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

— $\frac{18}{24}$: $18 = 6 \times 3$ et $24 = 6 \times 4$, donc $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

— $\frac{35}{63}$: $35 = 7 \times 5$ et $63 = 7 \times 9$, donc $\frac{35}{63} = \frac{5}{9}$.

— $\frac{48}{60}$: $48 = 12 \times 4$ et $60 = 12 \times 5$, donc $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$.

— **Méthode par étapes** : si l'on ne voit pas 12 tout de suite, on divise par 2, puis encore par 2, puis par 3 : $\frac{48}{60} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

— **Fin du calcul** : on s'arrête quand numérateur et dénominateur n'ont plus d'autre diviseur commun que 1.

Réponse. $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{4}{5}$.

Correction de l'exercice 2 – Comparer deux fractions

Dans chaque cas, un dénominateur est un **multiple** de l'autre : on transforme la fraction au plus petit dénominateur.

a) $12 = 6 \times 2$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{5}{6} = \frac{5\times 2}{6\times 2} = \frac{10}{12}$$

Or $10 > 7$, donc $\frac{5}{6} > \frac{7}{12}$.

b) $20 = 5 \times 4$: $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$. Or $12 < 13$, donc $\frac{3}{5} < \frac{13}{20}$.

c) $8 = 4 \times 2$: $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$. Or $14 < 17$, donc $\frac{7}{4} < \frac{17}{8}$.

— **Contrôle de a)** : $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$ et $\frac{7}{12} \approx 0{,}58$ ✓

— **Piège** : on ne compare jamais les numérateurs de fractions qui n'ont pas le même dénominateur.

Réponse. a) $\frac{5}{6} > \frac{7}{12}$ · b) $\frac{3}{5} < \frac{13}{20}$ · c) $\frac{7}{4} < \frac{17}{8}$.

Correction de l'exercice 3 – Ranger des fractions

Les dénominateurs 2, 4 et 8 divisent tous 8 : on écrit toutes les fractions en **huitièmes**.

— $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$; $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

— $\frac{3}{8}$ et $\frac{7}{8}$ restent inchangées.

On range les numérateurs : $3 < 4 < 6 < 7 < 10$. D'où

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{5}{4}$$

— **Contrôle** : seule $\frac{5}{4}$ a un numérateur plus grand que son dénominateur ; c'est la seule supérieure à 1, elle est donc bien la dernière ✓

— **Méthode** : on choisit comme dénominateur commun le plus grand des dénominateurs quand il est multiple de tous les autres.

Réponse. $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{5}{4}$.

Correction de l'exercice 4 – Additions à même dénominateur

Les dénominateurs sont égaux : on **garde** le dénominateur et on additionne (ou soustrait) les numérateurs.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$.

b) $\frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{12}{9}$, qui se simplifie par 3 : $\frac{4}{3}$.

c) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

— **Piège classique** : on n'additionne **pas** les dénominateurs. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ n'est pas $\frac{5}{14}$: deux septièmes plus trois septièmes font cinq septièmes, comme 2 pommes plus 3 pommes font 5 pommes.

Réponse. a) $\frac{5}{7}$ · b) $\frac{4}{3}$ · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 – Additions à dénominateurs multiples

On met d'abord au même dénominateur, en transformant la fraction au plus petit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dénominateur, puis on additionne.

a) $8 = 2 \times 4$, donc $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

b) $12 = 3 \times 4$, donc $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$: $\frac{8}{12} + \frac{5}{12} = \frac{13}{12}$.

c) $10 = 5 \times 2$, donc $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$: $\frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$.

— **Contrôle de a)** : $0{,}5 + 0{,}375 = 0{,}875 = \frac{7}{8}$ ✓

— **Remarque** : $\frac{13}{12}$ ne se simplifie pas (13 n'a que 1 et 13 comme diviseurs).

Réponse. a) $\frac{7}{8}$ · b) $\frac{13}{12}$ · c) $\frac{3}{10}$.

Correction de l'exercice 6 – Un entier et une fraction

Un entier s'écrit comme une fraction de n'importe quel dénominateur :

$$n = \frac{n \times d}{d} \qquad \text{par exemple } 1 = \frac{8}{8}$$

a) $2 = \frac{8}{4}$, donc $2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

b) $1 = \frac{8}{8}$, donc $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

c) $3 = \frac{18}{6}$, donc $3 - \frac{7}{6} = \frac{18}{6} - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$.

— **Contrôle de a)** : $2 + 0{,}75 = 2{,}75$ et $11 \div 4 = 2{,}75$ ✓

— **Interprétation de b)** : si l'on mange 5 parts d'une pizza coupée en 8, il en reste 3 parts, soit $\frac{3}{8}$.

Réponse. a) $\frac{11}{4}$ · b) $\frac{3}{8}$ · c) $\frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 7 – Illustrer une somme

a) La moitié de 6 parts, c'est 3 parts ; le tiers de 6 parts, c'est 2 parts. Léa colorie $3 + 2 = 5$ parts.

b) Le calcul est $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. On écrit les deux fractions en **sixièmes** (car $6 = 2 \times 3$) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

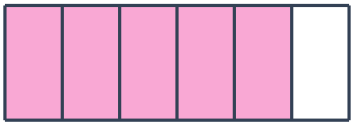
On retrouve bien 5 parts sur 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Remarque** : ici aucun des deux dénominateurs n'est multiple de l'autre ; on a pris 6, qui est un multiple de 2 **et** de 3.

— **Piège** : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$, puisque $\frac{2}{5}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$ tout seul.

Réponse. a) 5 parts · b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.



La moitié puis le tiers : 5 parts sur 6

Correction de l'exercice 8 – Multiplier par un entier

Multiplier une fraction par un entier, c'est multiplier seulement son **numérateur** :

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b}$$

a) $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ (trois fois deux cinquièmes font six cinquièmes).

b) $4 \times \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ (on simplifie par 4).

c) $\frac{7}{12} \times 6 = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$ (on simplifie par 6).

— **Astuce** : on peut simplifier **avant** de calculer. Dans b), 4 et 8 se simplifient : $4 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{2}$ directement.

— **Piège** : on ne multiplie pas le dénominateur ; $3 \times \frac{2}{5} \neq \frac{6}{15}$.

Réponse. a) $\frac{6}{5}$ · b) $\frac{5}{2}$ · c) $\frac{7}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – Fraction d'une quantité

Prendre une fraction d'une quantité, c'est **multiplier** :

$$\frac{a}{b} \text{ de } N = \frac{a}{b} \times N = N \div b \times a$$

a) $40 \div 5 = 8$, puis $8 \times 3 = 24$.

b) $12 \div 4 = 3$, puis $3 \times 7 = 21$. Le résultat dépasse 12, ce qui est normal car $\frac{7}{4} > 1$.

c) Une heure et demie = 90 min ; $90 \div 3 = 30$; $30 \times 2 = 60$ min, soit une heure.

— **Méthode** : diviser d'abord évite les grands nombres ($40 \times 3 = 120$ puis $120 \div 5 = 24$ donne le même résultat, avec un calcul plus long).

Réponse. a) 24 · b) 21 · c) 60 min.

Correction de l'exercice 10 – Dénominateurs quelconques

Aucun dénominateur n'est multiple de l'autre : on cherche un **multiple commun** des dénominateurs.

a) Multiple commun de 5 et 4 : 20. $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$.

b) Multiple commun de 6 et 8 : 24. $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Multiple commun de 3, 4 et 6 : 12. $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

— **Astuce** : le produit des dénominateurs est toujours un multiple commun ($6 \times 8 = 48$), mais un plus petit multiple commun (24) donne des calculs plus simples.

Réponse. a) $\frac{13}{20}$ · b) $\frac{11}{24}$ · c) $\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 11 – La tarte partagée

a) On écrit le quart en huitièmes : $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

b) La tarte entière vaut $\frac{8}{8}$: il reste $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

— **Interprétation** : avec une tarte coupée en 8 parts égales, Nina en mange 3, Léo 2, et il en reste 3.

Réponse. a) $\frac{5}{8}$ · b) $\frac{3}{8}$.

Correction de l'exercice 12 – Priorités de calcul

On effectue d'abord les parenthèses, puis les multiplications, puis les additions et soustractions.

— A : la multiplication d'abord, $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4}$. Puis $A = \frac{2}{4} + \frac{6}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

— B : la parenthèse d'abord,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{donc } B = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

— C : la multiplication d'abord, $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$. Puis $C = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

— **Piège** : dans A, calculer de gauche à droite donnerait $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times 2 = \frac{5}{2}$, ce qui est faux.

Réponse. $A = 2 \cdot B = 2 \cdot C = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – L'argent de poche

a) On additionne les deux fractions, en écrivant $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

b) Tout son argent correspond à $1 = \frac{8}{8}$. Il lui reste $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

c) $\frac{3}{8}$ de 64 € : $64 \div 8 = 8$, puis $8 \times 3 = 24$ €.

— **Vérification** : livre $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ € ; jeu $\frac{3}{8} \times 64 = 24$ € ; $16 + 24 + 24 = 64$ € ✓

— **Méthode** : on travaille d'abord avec les fractions, et on ne passe aux euros qu'à la fin.

Réponse. a) $\frac{5}{8}$ · b) $\frac{3}{8}$ · c) 24 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Le réservoir d’eau

a) On additionne $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Aucun dénominateur n’est multiple de l’autre ; on cherche un multiple commun de 3 et 4 : 12.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

b) Il reste $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ du réservoir, soit $60 \div 12 \times 5 = 5 \times 5 = 25$ litres.

— **Vérification en litres** : lundi $60 \div 3 = 20$ L, mardi $60 \div 4 = 15$ L ; $60 - 20 - 15 = 25$ L ✓

— **Remarque** : les deux méthodes (fractions ou litres) doivent donner le même résultat ; c’est un excellent contrôle.

Réponse. a) $\frac{7}{12}$ · b) 25 L.

Correction de l’exercice 15 – Vrai ou faux

a) **Faux** : on garde le dénominateur, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. D’ailleurs $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$: deux tiers ne peuvent pas valoir un tiers.

b) **Vrai** : $\frac{2}{5} \times 5 = \frac{10}{5} = 2$.

c) **Vrai** : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ et $6 > 5$.

d) **Faux** : on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, puis

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

— **À retenir** : additionner les dénominateurs est l’erreur la plus fréquente. Un test simple la détecte : la somme doit être plus grande que chacun des deux termes, et $\frac{2}{6}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).