

Plaque 2 - Expérience aléatoire, issues et événements

Probabilités — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire des probabilités.

- **Expérience aléatoire** : on connaît tous les résultats possibles, mais on ne peut pas prévoir lequel sortira. Ces résultats sont les **issues**.
- **Événement** : ensemble d'issues, décrit par une phrase (« obtenir un nombre pair » = $\{2; 4; 6\}$ pour un dé).
- La probabilité d'un événement est un nombre entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\text{impossible}) = 0 \quad P(\text{certain}) = 1$$
- **Événement contraire** $\bar{A}$: il est réalisé exactement quand A ne l'est pas ; il contient toutes les issues qui ne sont **pas** dans A .

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
- Deux événements sont **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue en commun (ils ne peuvent pas se produire en même temps).
- Quand les issues ont toutes la même chance (**équiprobabilité**),

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}}$$
- Le hasard n'a pas de mémoire : les lancers précédents ne changent pas la probabilité du lancer suivant.

Correction de l'exercice 1 - Aléatoire ou pas ?

Une expérience est **aléatoire** quand on connaît les résultats possibles sans pouvoir prévoir celui qui sortira.

aléatoire = issues connues + résultat imprévisible

- Aléatoire** : pile ou face, on ne sait pas lequel.
- Pas aléatoire** : le résultat est toujours 56.
- Aléatoire** : on connaît les cartes, pas celle qui sera tirée.
- Pas aléatoire** : la table a une longueur fixe ; on retrouve la même mesure à chaque fois (aux erreurs de mesure près).
- Aléatoire** : tous les numéros vendus peuvent gagner.

Réponse. Aléatoires : a, c, e.

Correction de l'exercice 2 - Lister toutes les issues

Une issue est un résultat possible ; on les écrit entre accolades, sans répétition :

issues = $\{\dots\}$

- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$: 8 issues.
- $\{M; A; T; H; S\}$: 5 issues.
- $\{B; A; N; E\}$: 4 issues seulement, car les lettres A et N sont répétées. Attention, ces 4 issues n'ont **pas** la même chance : il y a 2 A sur 6 lettres, mais 1 seul B.
- $\{\text{lundi}; \dots; \text{dimanche}\}$: 7 issues.

Réponse. a) 8 · b) 5 · c) 4 (non équiprobables) · d) 7.

Correction de l'exercice 3 - D'une phrase aux issues

On passe en revue les 12 issues possibles, $\{1; 2; \dots; 12\}$, et on garde celles qui vérifient la phrase.

$$A = \{4; 8; 12\}$$

- a) Les multiples de 4 jusqu'à 12 : 4, 8, 12.
- b) $B = \{2; 3; 5; 7; 11\}$: un nombre premier a exactement deux diviseurs ; 1 n'est pas premier, 9 non plus ($9 = 3 \times 3$).
- c) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$: les nombres qui divisent 12.
- d) $D = \{10; 11; 12\}$: « supérieur à 9 » exclut le 9.

Réponse. $A = \{4; 8; 12\} \cdot B = \{2; 3; 5; 7; 11\} \cdot C = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} \cdot D = \{10; 11; 12\}$.

Correction de l'exercice 4 - Des issues à la phrase

On cherche ce qu'ont en commun les issues de chaque liste. Plusieurs phrases peuvent convenir.

$$\{2; 4; 6\} = \text{« obtenir un nombre pair »}$$

- b) « obtenir un nombre inférieur à 3 » (ou « au plus 2 »).
- c) « obtenir un multiple de 3 ».
- d) Toutes les issues : c'est un événement **certain**, par exemple « obtenir un nombre entre 1 et 6 ».
- e) Aucune issue : c'est un événement **impossible**, par exemple « obtenir 7 ».

Contrôle de c) : les multiples de 3 jusqu'à 6 sont bien 3 et 6.

Réponse. a) pair · b) inférieur à 3 · c) multiple de 3 · d) certain · e) impossible.

Correction de l'exercice 5 - Trouver l'événement contraire

L'événement contraire contient **toutes les autres issues** ; ensemble, un événement et son contraire contiennent les 10 issues.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- a) $A = \{7; 8; 9; 10\}$, donc $\bar{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$: « obtenir au plus 6 » (ou « moins de 7 »).
- b) $\bar{B}$: « obtenir un nombre impair » = $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.
- c) $\bar{C}$: « ne pas obtenir 10 » = $\{1; \dots; 9\}$.

Piège : le contraire de « au moins 7 » n'est pas « au plus 7 », car le 7 serait alors dans les deux. Contrôle : $P(A) = \frac{4}{10}$ et $P(\bar{A}) = \frac{6}{10}$, dont la somme vaut 1.

Réponse. a) « au plus 6 » · b) « impair » · c) « pas 10 ».

Correction de l'exercice 6 - Incompatibles ou non ?

On écrit les issues de chaque événement, puis on cherche une issue **commune** :

$$A = \{2; 4; 6\} \quad B = \{5\} \quad C = \{3; 6\} \quad D = \{5; 6\}$$

- a) A et B n'ont aucune issue commune (5 est impair) : **incompatibles**.
- b) A et C ont l'issue 6 en commun : **pas incompatibles** ; obtenir 6 réalise les deux à la fois.
- c) B et D ont l'issue 5 en commun : **pas incompatibles**.

Attention : deux événements contraires sont incompatibles, mais deux événements incompatibles ne sont pas forcément contraires (A et B ne couvrent pas les issues 1 et 3).

Réponse. a) oui · b) non (le 6) · c) non (le 5).

Correction de l'exercice 7 - L'échelle des probabilités

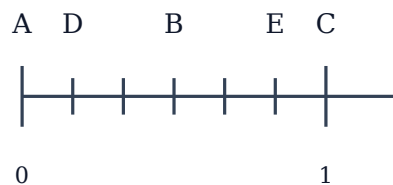
On calcule chaque probabilité, les issues étant équiprobables :

$$P = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}}$$

- A : impossible, $P = 0$.
- B : $\frac{1}{2}$, une chance sur deux.
- C : certain, $P = 1$.
- D : $\frac{1}{6}$, peu probable.
- E : contraire de D , $P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, très probable.

On gradue l'échelle en sixièmes : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ tombe sur la troisième graduation.

Réponse. A 0 · D $\frac{1}{6}$ · B $\frac{1}{2}$ · E $\frac{5}{6}$ · C 1.



Échelle de 0 (impossible) à 1 (certain), graduée en sixièmes

Correction de l'exercice 8 - Deux couleurs, une chance sur deux ?

a) Tom a tort. Il y a bien deux **couleurs**, mais les issues de l'expérience sont les 10 **boules**, qui ont toutes la même chance d'être tirées.

$$P(\text{rouge}) = \frac{4}{10} = 0,4 \quad P(\text{bleue}) = \frac{6}{10} = 0,6$$

b) Le bleu est plus probable ($0,6 > 0,4$), ce qui est logique : il y a plus de boules bleues.

Retenir : « deux résultats possibles » ne veut pas dire « une chance sur deux » ; il faut que ces résultats soient **équiprobables**.

Réponse. a) non, $P(\text{rouge}) = 0,4$ · b) le bleu.

Correction de l'exercice 9 - Les lettres de BANANE

a) Il y a 6 cartons (B, A, N, A, N, E) mais seulement 4 lettres différentes.

b) Ce sont les **cartons** qui ont tous la même chance d'être tirés :

$$P(\text{lettre}) = \frac{\text{nombre de cartons portant la lettre}}{6}$$

$$\text{— } P(B) = \frac{1}{6} ; P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} ; P(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} ; P(E) = \frac{1}{6}.$$

c) Non : A et N ont deux fois plus de chances que B et E. Contrôle :

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Réponse. b) $B \frac{1}{6}$, $A \frac{1}{3}$, $N \frac{1}{3}$, $E \frac{1}{6}$ · c) non.

Correction de l'exercice 10 - Le hasard n'a pas de mémoire

Elle a tort. La pièce ne « se souvient » pas des lancers précédents : à chaque lancer, les deux issues restent équiprobables.

$$P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$$

au quatrième lancer comme au premier. Obtenir trois fois face de suite est peu fréquent, mais cela ne change rien au lancer suivant.

Ce qui est vrai, en revanche : sur un **très grand** nombre de lancers, la fréquence de pile se rapprochera de $\frac{1}{2}$. Mais elle s'en rapproche parce que les nouveaux lancers « noient » les premiers, pas parce que la pièce compense.

Réponse. Non : $P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$ à chaque lancer.

Correction de l'exercice 11 - Quel événement est le plus probable ?

Les 8 secteurs sont égaux, donc équiprobables :

$$P = \frac{\text{nombre de secteurs favorables}}{8}$$

- « vert » : aucun secteur, $P = 0$ (impossible).
- « bleu » : $P = \frac{2}{8}$.
- « rouge » : $P = \frac{3}{8}$.
- « pas jaune » : contraire de « jaune », $P = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ (les 3 rouges et les 2 bleus).

Du moins probable au plus probable : vert, bleu, rouge, pas jaune. Les probabilités ayant le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs.

Réponse. vert (0) < bleu ($\frac{2}{8}$) < rouge ($\frac{3}{8}$) < pas jaune ($\frac{5}{8}$).

Correction de l'exercice 12 - Deux dés différents

Pour chaque dé, les faces sont équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{faces favorables}}{\text{nombre de faces}}$$

a) Obtenir 1 : $\frac{1}{4} = 0,25$ avec le dé à 4 faces, $\frac{1}{6} \approx 0,17$ avec le dé à 6 faces. Le dé à 4 faces est plus avantageux : moins il y a de faces, plus chacune a de chances.

b) Obtenir un nombre pair : $\{2; 4\}$ sur le dé à 4 faces, $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\{2; 4; 6\}$ sur le dé à 6 faces, $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Les deux dés se valent.

Réponse. a) le dé à 4 faces ($\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$) · b) égalité ($\frac{1}{2}$).

Correction de l'exercice 13 - Lancer deux pièces

a) On note d'abord la pièce de 1 €, puis celle de 2 € :

$$\{PP; PF; FP; FF\}$$

soit 4 issues. PF et FP sont différentes : pile sur la pièce de 1 € et face sur celle de 2 €, ou

l'inverse.

b) « Deux côtés identiques » = {PP; FF}.

c) « Au moins un pile » = {PP; PF; FP}. Son contraire contient la seule issue restante, {FF} : « obtenir deux faces », c'est-à-dire « aucun pile ».

Réponse. a) PP, PF, FP, FF · b) PP, FF · c) contraire : FF (aucun pile).

Correction de l'exercice 14 - Tirer un élève au sort

a) Chaque élève est une issue : il y a 28 issues équiprobables.

b) On lit le tableau :

- « fille externe » : la case qui croise « Filles » et « Externes », 4 issues ;
- « externe » : le total de la colonne, 9 issues.

On en déduit par exemple

$$P(\text{externe}) = \frac{9}{28}$$

c) Non : les 4 filles externes réalisent les deux événements à la fois. Il existe donc des issues communes.

Réponse. a) 28 · b) 4 et 9 · c) non.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un jeu de 32 cartes

Chaque carte est une issue ; les 32 issues sont équiprobables.

$$P(A) = \frac{\text{cartes favorables}}{32}$$

a) « Pique » : 8 issues, $P = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. « As de pique » : 1 issue, $P = \frac{1}{32}$. Le second événement est inclus dans le premier.

b) Les cartes rouges sont les cœurs et les carreaux ; le contraire est « tirer une carte noire » (pique ou trèfle).

c) Non : le roi de cœur réalise les deux.

d) Impossible : « tirer un 2 » (il n'y en a pas dans un jeu de 32 cartes). Certain : « tirer une carte de l'une des quatre couleurs ».

Réponse. a) 8 et 1 · b) carte noire · c) non (roi de cœur) · d) par exemple « un 2 » et « une carte ».