

Plaque 4 - Fréquences et probabilités : expérimenter, estimer, prévoir

Probabilités — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fréquence et probabilité.

- Fréquence observée d'un résultat sur n essais :

$$f = \frac{\text{nombre de fois où le résultat est apparu}}{n}$$

- Plus le nombre d'essais est grand, plus la fréquence se rapproche de la probabilité (elle **se stabilise**) ; sur peu d'essais, de grands écarts sont normaux.
- Quand on ne peut pas calculer une probabilité (objet non symétrique), on l'**estime** par la fréquence observée sur un grand nombre d'essais.
- **Prévoir** : sur N nouvelles répétitions, on s'attend à environ
 $N \times P$ résultats favorables
- Une fréquence très éloignée de la probabilité sur un **grand** nombre d'essais fait douter de l'équilibre (dé truqué, roue faussée).
- Tableur : =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) donne un entier au hasard de 1 à 6 ; on simule ainsi des milliers de lancers.

Correction de l'exercice 1 - La punaise qui tombe

- a) On applique la formule de la fréquence :

$$f = \frac{124}{200} = \frac{62}{100} = 0,62$$

La punaise est retombée pointe en haut dans 62 % des lancers.

- b) Non : les deux positions ne sont pas équiprobables, car la punaise n'est pas symétrique. On ne peut pas « compter des issues ». On **estime** donc la probabilité par la fréquence observée sur un grand nombre de lancers : $P(\text{pointe en haut}) \approx 0,62$. L'estimation serait plus sûre avec encore plus de lancers.

Réponse. a) 0,62 · b) non ; on l'estime à environ 0,62.

Correction de l'exercice 2 - Une fréquence qui se stabilise

- a) On divise chaque nombre de piles par le nombre de lancers correspondant :

$$f = \frac{\text{piles}}{\text{lancers}}$$

Lancers	10	50	100	500	1 000
Fréquence	0,7	0,44	0,53	0,488	0,503

- b) Au début, la fréquence s'éloigne beaucoup de 0,5 (0,7 après 10 lancers). Plus on lance, plus elle se rapproche de la probabilité $P(\text{pile}) = 0,5$: c'est la **stabilisation** des fréquences. Elle n'est cependant jamais exactement égale à 0,5 à chaque étape.

Réponse. a) 0,7 ; 0,44 ; 0,53 ; 0,488 ; 0,503 · b) elle se rapproche de 0,5.

Correction de l'exercice 3 - Lire la stabilisation sur un graphique

a) Après 100 lancers (abscisse 1), la fréquence vaut 0,25 ; après 1 000 lancers (abscisse 10), environ 0,167.

b) La courbe oscille de moins en moins et se stabilise autour de 0,167. C'est la probabilité d'obtenir 6 avec un dé équilibré :

$$P(6) = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Le dé semble donc équilibré. La fréquence de 0,25 au début n'avait rien d'inquiétant : 100 lancers, c'est encore peu.

Réponse. a) 0,25 et environ 0,167 · b) vers $\frac{1}{6}$; oui.

Correction de l'exercice 4 - Cinq groupes, une classe

a) Chaque groupe a fait 50 lancers : $f = \frac{\text{piles}}{50}$, soit 0,42 ; 0,56 ; 0,48 ; 0,6 ; 0,52.

b) La classe a fait $5 \times 50 = 250$ lancers et obtenu $21 + 28 + 24 + 30 + 26 = 129$ piles :

$$f = \frac{129}{250} = 0,516$$

c) Les fréquences des groupes varient beaucoup (de 0,42 à 0,6), car 50 lancers, c'est peu. En regroupant les résultats, on obtient 250 lancers et une fréquence bien plus proche de la probabilité 0,5. Mettre en commun les expériences, c'est augmenter le nombre d'essais.

Réponse. a) 0,42 ; 0,56 ; 0,48 ; 0,6 ; 0,52 · b) 0,516.

Correction de l'exercice 5 - Deviner le contenu d'une urne

a) On calcule les deux fréquences sur 400 tirages :

$$f(\text{rouge}) = \frac{162}{400} = 0,405 \quad f(\text{bleu}) = \frac{400 - 162}{400} = \frac{238}{400} = 0,595$$

b) Avec 400 tirages, la fréquence est proche de la probabilité. Si l'urne contient r boules rouges sur 10, alors $P(\text{rouge}) = \frac{r}{10}$. La valeur la plus proche de 0,405 est $\frac{4}{10} = 0,4$: l'urne contient probablement 4 boules rouges et 6 bleues.

On ne peut pas en être **certain** : c'est une estimation, qui serait confirmée en ouvrant l'urne.

Réponse. a) 0,405 et 0,595 · b) probablement 4 rouges.

Correction de l'exercice 6 - Un écart normal ?

a) Le rouge occupe un quart de la roue : $P(\text{rouge}) = \frac{1}{4} = 0,25$. Sur 80 tours, on s'attend à environ

$$80 \times \frac{1}{4} = 20 \text{ fois le rouge}$$

b) $f = \frac{26}{80} = 0,325$. C'est plus que 0,25, mais 80 tours sont peu nombreux : un écart de ce type est courant. On ne peut **pas** conclure que la roue est truquée. Pour le savoir, il faudrait la faire tourner des centaines de fois et voir si la fréquence reste éloignée de 0,25.

Réponse. a) 0,25, environ 20 fois · b) 0,325 ; non, trop peu de tours.

Correction de l'exercice 7 - Ce dé est-il truqué ?

a) On applique la formule de la fréquence :

$$f(6) = \frac{180}{600} = 0,3$$

(contrôle : $78 + 81 + 85 + 90 + 86 + 180 = 600$).

b) Pour un dé équilibré, on attend $P(6) = \frac{1}{6} \approx 0,17$, soit environ $600 \times \frac{1}{6} = 100$ fois le 6. On l'a obtenu 180 fois, presque deux fois plus, et sur un **grand** nombre de lancers. Un tel écart est très improbable pour un dé équilibré : ce dé est très probablement **truqué** en faveur du 6 (les autres faces sortent d'ailleurs un peu moins de 100 fois).

Réponse. a) 0,3 · b) très probablement truqué.

Correction de l'exercice 8 - Simuler avec un tableur

a) Chaque cellule contient un entier choisi au hasard entre 1 et 6 : c'est un lancer de dé **simulé**. La colonne représente 1 000 lancers.

b) NB.SI compte les cellules égales à 6 : on a obtenu 172 fois le 6.

$$f = \frac{172}{1\,000} = 0,172$$

proche de $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

c) Non : une nouvelle simulation donne d'autres résultats. $\frac{158}{1\,000} = 0,158$ est encore proche de 0,167. Les fréquences varient d'une série à l'autre, mais restent autour de la probabilité.

Réponse. a) un lancer simulé · b) le nombre de 6 ; 0,172 · c) non.

Correction de l'exercice 9 - Prévoir les pièces défectueuses

a) On multiplie le nombre de pièces par la probabilité :

$$N \times P = 5\,000 \times 0,02 = 100 \text{ pièces}$$

On peut prévoir **environ** 100 pièces défectueuses, soit 2 % de la production.

b) 104 est très proche de 100 : la fréquence observée, $\frac{104}{5\,000} = 0,0208$, est presque égale à 0,02. C'est cohérent ; la prévision donne un ordre de grandeur, pas un nombre exact.

Réponse. a) environ 100 · b) oui ($0,0208 \approx 0,02$).

Correction de l'exercice 10 - Les lancers francs

a) On calcule la fréquence sur la saison :

$$f = \frac{72}{90} = \frac{8}{10} = 0,8$$

soit 80 % de réussite.

b) On utilise cette fréquence comme estimation de la probabilité de réussir un lancer :

$$25 \times 0,8 = 20 \text{ réussites environ}$$

Ce n'est qu'une prévision : elle peut en réussir 18 ou 22 un jour de match. Plus la saison est longue, plus l'estimation 0,8 est fiable.

Réponse. a) 0,8 · b) environ 20.

Correction de l'exercice 11 - Graines qui germent

a) On applique la formule de la fréquence :

$$f = \frac{215}{250} = 0,86$$

soit 86 % de germination.

b) On estime la probabilité qu'une graine germe par 0,86 ; sur 60 graines, on prévoit

$$60 \times 0,86 = 51,6$$

soit environ 52 graines. Le résultat n'étant pas entier, on l'arrondit : on ne peut pas voir germer 51,6 graines.

Réponse. a) 86 % · b) environ 52 graines.

Correction de l'exercice 12 - La somme de deux dés

a) La barre la plus haute est celle de la somme 7 :

$$f(7) = \frac{170}{1\,000} = 0,17$$

b) Pour obtenir 2, il faut 1 **et** 1 ; pour 12, 6 **et** 6 : une seule façon à chaque fois. La somme 7, elle, s'obtient de six façons : 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1.

c) Non : les sommes du milieu ont beaucoup plus de façons d'être obtenues. Il y a onze sommes possibles, mais leur probabilité n'est pas $\frac{1}{11}$; l'expérience le montre clairement.

Réponse. a) 7, $f = 0,17$ · b) une seule façon · c) non.

Correction de l'exercice 13 - Un raisonnement trop rapide

La probabilité $\frac{1}{6}$ ne garantit pas un 6 tous les six lancers. Elle signifie que, sur un **grand** nombre de lancers, le 6 apparaît environ une fois sur six :

$$\text{sur 6 000 lancers: } 6\,000 \times \frac{1}{6} = 1\,000 \text{ six environ}$$

Sur 6 lancers seulement, on peut très bien n'obtenir aucun 6, ou en obtenir deux : c'est même fréquent. 6 lancers sont beaucoup trop peu pour juger un dé. Pour tester le dé, Sami devrait le lancer plusieurs centaines de fois et calculer la fréquence du 6.

Réponse. 6 lancers sont trop peu : la probabilité ne se « voit » que sur un grand nombre d'essais.

Correction de l'exercice 14 - D'un sondage à une probabilité

a) On applique la formule de la fréquence :

$$f = \frac{420}{1\,200} = \frac{35}{100} = 0,35$$

b) L'échantillon est grand et choisi au hasard : on peut estimer la probabilité par cette fréquence, $P \approx 0,35$, soit environ 35 %.

c) On prévoit environ

$$45\,000 \times 0,35 = 15\,750 \text{ cyclistes}$$

C'est une estimation : un autre échantillon de 1 200 personnes donnerait une fréquence un peu différente (par exemple 0,34 ou 0,36). Le choix **au hasard** des personnes est indispensable, sinon l'estimation n'a pas de valeur.

Réponse. a) $0,35$ · b) environ $0,35$ · c) environ $15\,750$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le bouchon

a) On divise chaque effectif par 500 :

$$f(\text{côté}) = \frac{310}{500} = 0,62 \quad f(\text{dessus}) = \frac{120}{500} = 0,24 \quad f(\text{dessous}) = \frac{70}{500} = 0,14$$

Contrôle : $0,62 + 0,24 + 0,14 = 1$.

b) Non : si elles l'étaient, chaque fréquence serait proche de $\frac{1}{3} \approx 0,33$. Or « côté » dépasse 0,6 sur 500 lancers, ce qui est un grand nombre d'essais.

c) On utilise les fréquences comme probabilités estimées : côté $2\,000 \times 0,62 = 1\,240$; dessus $2\,000 \times 0,24 = 480$; dessous $2\,000 \times 0,14 = 280$ (environ).

Réponse. a) $0,62$; $0,24$; $0,14$ · b) non · c) environ $1\,240$, 480 , 280 .