

Plaquette 5 - Jeux et problèmes : est-ce équitable ?

Probabilités — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Outils pour étudier un jeu.

- Situation d'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}}$$

- Un jeu à deux joueurs est **équitable** si

$$P(A \text{ gagne}) = P(B \text{ gagne})$$

- Expérience en deux étapes (deux dés, deux joueurs) : on dresse un **tableau à double entrée** ; chaque case est une issue, toutes équiprobables si chaque étape l'est.

- Roue : probabilité d'un secteur = $\frac{\text{angle}}{360^\circ}$; $\text{angle} = P \times 360^\circ$.

- Contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Tirage **sans remise** : après un tirage, le contenu de l'urne change, donc les probabilités du tirage suivant aussi.

- Pour rendre un jeu équitable : on change la règle (les issues gagnantes) ou le contenu (le nombre de boules, la taille des secteurs).

Correction de l'exercice 1 - Pile ou face

On compare les probabilités de gagner des deux joueurs :

$$\text{équitable} \Leftrightarrow P(\text{Alice}) = P(\text{Bruno})$$

a) $P(\text{Alice}) = P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$ et $P(\text{Bruno}) = \frac{1}{2}$: le jeu est **équitable**.

b) Avec le dé : $P(\text{Alice}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(\text{Bruno}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Bruno a deux fois plus de chances : le jeu n'est **pas** équitable.

Règle équitable : Alice gagne sur 1, 2 ou 3, Bruno sur 4, 5 ou 6 (ou encore : Alice sur un nombre pair, Bruno sur un impair). Chacun a alors $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Réponse. a) oui · b) non ($\frac{1}{3}$ contre $\frac{2}{3}$) ; par exemple 1-2-3 contre 4-5-6.

Correction de l'exercice 2 - La roue de la fête foraine

a) La probabilité d'un secteur est proportionnelle à son angle :

$$P = \frac{\text{angle}}{360^\circ}$$

Rouge : $\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$; bleu : $\frac{120}{360} = \frac{4}{12}$; vert : $\frac{90}{360} = \frac{3}{12}$.

b) $\frac{5}{12} > \frac{4}{12}$: Chloé est avantagée, le jeu n'est pas équitable. Pour l'équité, il faut autant de rouge que de bleu. Le vert garde 90° ; il reste $360 - 90 = 270^\circ$ à partager en deux : 135° pour le rouge et 135° pour le bleu. Le bleu doit donc passer à 135° (et le rouge

descendre à 135°).

Réponse. a) $\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ · b) non ; rouge et bleu à 135° chacun.

Correction de l'exercice 3 - Rendre l'urne équitable

a) Il y a 8 boules équiprobables :

$$P(\text{Emma}) = \frac{3}{8} \quad P(\text{Farid}) = \frac{5}{8}$$

Farid est avantagé : le jeu n'est pas équitable.

b) Le jeu est équitable quand il y a autant de rouges que de noires. Avec 5 noires, il faut 5 rouges : on ajoute $5 - 3 = 2$ boules rouges. Contrôle : $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ pour chacun.

c) On peut aussi retirer 2 boules noires : 3 rouges et 3 noires, soit $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ chacun.

Réponse. a) non ($\frac{3}{8}$ contre $\frac{5}{8}$) · b) 2 rouges · c) retirer 2 noires.

Correction de l'exercice 4 - Somme ou produit de deux dés

a) Chaque case croise un résultat du dé rouge (ligne) et du dé vert (colonne) :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables.

b) On compte 18 sommes paires et 18 impaires : $P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ chacun. **Équitable.**

c) Un produit est impair seulement si les **deux** dés sont impairs : $3 \times 3 = 9$ cases.

$$P(\text{Hana}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad P(\text{Gaël}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Pas équitable : Gaël a trois fois plus de chances.

Réponse. a) 36 issues · b) oui · c) non ($\frac{3}{4}$ contre $\frac{1}{4}$).

Correction de l'exercice 5 - Pierre, feuille, ciseaux

a) Ligne : geste d'Inès ; colonne : geste de Jules. On écrit le résultat pour Inès.

Inès \ Jules	Pierre	Feuille	Ciseaux
Pierre	nul	perd	gagne
Feuille	gagne	nul	perd
Ciseaux	perd	gagne	nul

Il y a $3 \times 3 = 9$ issues équiprobables.

b) On compte les cases :

$$P(\text{Inès}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad P(\text{Jules}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad P(\text{nul}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Inès et Jules ont la même probabilité de gagner : le jeu est **équitable**.

Réponse. a) 9 issues · b) $\frac{1}{3}$ chacun, et $\frac{1}{3}$ de nul : équitable.

Correction de l'exercice 6 - La tombola de l'association

a) Il y a $1 + 4 + 10 = 15$ tickets gagnants sur 100 :

$$P(\text{gagnant}) = \frac{15}{100} = 0,15$$

Au moins 10 € : $1 + 4 = 5$ tickets, $P = \frac{5}{100} = 0,05$.

b) Recette : $100 \times 2 = 200$ €. Valeur des lots : $50 + 4 \times 10 + 10 \times 2 = 50 + 40 + 20 = 110$ €. Bénéfice : $200 - 110 = 90$ €.

Remarque : un bon de 2 € ne fait que rembourser le ticket. Seuls 5 tickets sur 100 rapportent vraiment de l'argent au joueur ; c'est ce qui permet à l'association de gagner de l'argent.

Réponse. a) 0,15 et 0,05 · b) 90 €.

Correction de l'exercice 7 - Mélanger deux urnes

a) On calcule la probabilité de tirer une rouge dans chaque urne :

$$P_A = \frac{2}{5} = 0,4 \quad P_B = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

L'urne B est (un peu) plus avantageuse.

b) La grande urne contient $2 + 3 = 5$ rouges sur $5 + 7 = 12$ boules :

$$P = \frac{5}{12} \approx 0,42$$

C'est entre 0,4 et 0,43 : mieux que l'urne A, moins bien que l'urne B. Mélanger ne sert à rien si l'on peut choisir la meilleure urne. Piège : la probabilité du mélange n'est pas la moyenne $\frac{0,4 + 0,43}{2}$, car les urnes n'ont pas le même nombre de boules.

Réponse. a) l'urne B · b) $\frac{5}{12}$; moins bien que B.

Correction de l'exercice 8 - Construire une roue

a) L'angle d'un secteur est la probabilité multipliée par le tour complet :

$$\text{angle} = P \times 360^\circ$$

— Rouge : $0,45 \times 360 = 162^\circ$.

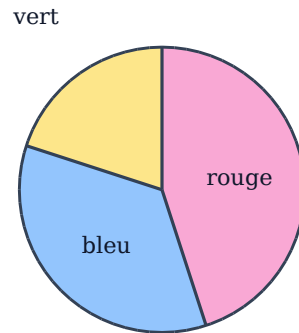
— Bleu : $0,35 \times 360 = 126^\circ$.

— Vert : $0,2 \times 360 = 72^\circ$.

Contrôle : $162 + 126 + 72 = 360^\circ$, et $0,45 + 0,35 + 0,2 = 1$.

b) On trace un cercle, un premier rayon, puis on reporte au rapporteur 162° , puis 126° ; le secteur restant mesure 72° .

Réponse. 162° , 126° , 72° .



Roue construite

Correction de l'exercice 9 - Le dé à douze faces

On liste les issues gagnantes de Kenza, sans compter deux fois une issue commune :

- multiples de 3 : 3, 6, 9, 12 ;
- multiples de 4 : 4, 8, 12 (12 est déjà compté).

Kenza gagne avec $\{3; 4; 6; 8; 9; 12\}$, soit 6 issues sur 12.

$$P(\text{Kenza}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad P(\text{Léo}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Le jeu est **équitable**. Piège : compter $4 + 3 = 7$ issues pour Kenza (en comptant deux fois le 12) ferait croire qu'elle est avantagée.

Réponse. Oui : $\frac{1}{2}$ chacun.

Correction de l'exercice 10 - Des chaussettes dans le noir

a) 10 chaussettes équiprobables, dont 6 bleues :

$$P(\text{bleue}) = \frac{6}{10} = 0,6$$

b) Il reste 9 chaussettes, dont 5 bleues :

$$P(\text{bleue}) = \frac{5}{9} \approx 0,56$$

c) Le premier tirage est **sans remise** : la chaussette prise n'est plus dans le tiroir. Le nombre total et le nombre de bleues ont diminué tous les deux, et la proportion de bleues a un peu baissé. Avec remise, la probabilité serait restée 0,6.

Réponse. a) 0,6 · b) $\frac{5}{9}$ · c) tirage sans remise.

Correction de l'exercice 11 - Le cadenas à code

a) Les codes vont de 000 à 999 : il y en a 1 000, tous équiprobables.

$$P = \frac{1}{1\,000} = 0,001$$

b) Les codes possibles vont maintenant de 700 à 799 : il en reste 100.

$$P = \frac{1}{100} = 0,01$$

La probabilité est multipliée par 10 : connaître un chiffre divise par 10 le nombre d'issues. C'est pourquoi on conseille de ne jamais révéler une partie d'un code.

Réponse. a) 1 000 codes, $\frac{1}{1\,000}$ · b) $\frac{1}{100}$.

Correction de l'exercice 12 - Modifier la règle avec les cartes

a) Il y a 32 cartes équiprobables.

$$P(\text{Nora}) = \frac{3 \times 4}{32} = \frac{12}{32} \quad P(\text{Oscar}) = \frac{2 \times 4}{32} = \frac{8}{32}$$

Nora est avantagée : le jeu n'est pas équitable.

b) Il faut donner à Oscar 12 cartes, soit 3 valeurs de 4 cartes : par exemple, Oscar gagne avec un as, un 10 **ou un 9**. Alors $P(\text{Oscar}) = \frac{12}{32} = P(\text{Nora})$. Il reste 8 cartes (les 7 et les 8) où personne ne gagne, ce qui ne gêne pas l'équité.

Réponse. a) non ($\frac{12}{32}$ contre $\frac{8}{32}$) · b) par exemple, Oscar gagne aussi avec les 9.

Correction de l'exercice 13 - 70 % de risque de pluie

a) Non : 70 % est la **probabilité** qu'il pleuve (au moins un peu) dans la journée, pas la durée de la pluie.

b) Sur un grand nombre de jours semblables, la fréquence des jours de pluie devrait être proche de 0,7 :

$$30 \times 0,7 = 21 \text{ jours de pluie environ}$$

c) Pas forcément : un événement de probabilité 0,7 ne se produit pas toujours. Son contraire, « pas de pluie », a une probabilité de $1 - 0,7 = 0,3$, soit à peu près un jour sur trois. On juge une prévision sur **beaucoup** de jours, pas sur un seul.

Réponse. a) non · b) environ 21 · c) pas forcément ($P(\text{pas de pluie}) = 0,3$).

Correction de l'exercice 14 - Un sac pour une kermesse

Le nombre de jetons d'une couleur est la probabilité multipliée par le nombre total N :

$$\text{jetons} = P \times N$$

a) Il faut que $\frac{1}{2}N$, $\frac{1}{3}N$ et $\frac{1}{6}N$ soient entiers, donc que N soit un multiple de 2, de 3 et de 6 : le plus petit est $N = 6$, avec 3 rouges, 2 bleus et 1 vert.

b) $N = 30$: 15 rouges, 10 bleus, 5 verts (contrôle : $15 + 10 + 5 = 30$).

c) Non : $\frac{1}{3} \times 20$ et $\frac{1}{6} \times 20$ ne sont pas entiers, car 20 n'est pas un multiple de 6.

Réponse. a) 6 jetons : 3, 2, 1 · b) 15, 10, 5 · c) non.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

On s'appuie sur la définition de l'équité et sur le tableau des deux dés :

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(12) = \frac{1}{36}$$

- a) **Vrai** : l'équité demande des probabilités **égales**, pas forcément $\frac{1}{2}$ (pierre-feuille-ciseaux : $\frac{1}{3}$ chacun, et $\frac{1}{3}$ de nul).
- b) **Faux** : 7 s'obtient de 6 façons, 12 d'une seule.
- c) **Faux** : on s'attend à **environ** 35 fois ; la fréquence observée varie autour de 0,35.
- d) **Vrai** : le contenu de l'urne change après chaque tirage (voir les chaussettes : $\frac{6}{10}$ puis $\frac{5}{9}$).

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) vrai.