

Plaquette 5 – Échelles, vitesses et problèmes

Proportionnalité et pourcentages — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les échelles et les vitesses.

- **Échelle** d'un plan ou d'une carte, les deux longueurs étant dans la **même unité** :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

- À l'échelle $\frac{1}{n}$, 1 cm sur le plan représente n cm en réalité : réel = plan $\times n$, plan = réel $\div n$.
- Une échelle plus grande que 1 est un **agrandissement** (photo d'insecte, schéma de cellule).
- **Vitesse constante** v : la distance d est proportionnelle à la durée t .

$$d = v \times t \quad v = \frac{d}{t} \quad t = \frac{d}{v}$$

- Durées : 1 h = 60 min, 30 min = 0,5 h, 15 min = 0,25 h, 20 min = $\frac{1}{3}$ h.
- Conversion : 1 m/s = 3 600 m/h = 3,6 km/h.
- **Débit, consommation, prix unitaire** : toujours « une quantité pour une unité », à multiplier par le nombre d'unités.

Correction de l'exercice 1 - Le plan au 1/200

À l'échelle $\frac{1}{200}$, les longueurs réelles sont 200 fois plus grandes que sur le plan :

$$\text{réel} = \text{plan} \times 200 \quad \text{plan} = \text{réel} \div 200$$

a) $4,5 \times 200 = 900$ cm, soit 9 m.

b) On convertit d'abord en centimètres : 6,4 m = 640 cm. Puis $640 \div 200 = 3,2$ cm.

Plan (cm)	1	4,5	3,2
Réel (cm)	200	900	640

Contrôle : 1 cm représente 2 m, donc 3,2 cm représentent 6,4 m.

Réponse. a) 9 m · b) 3,2 cm.

Correction de l'exercice 2 - La carte au 1/50 000

1 cm sur la carte représente 50 000 cm = 500 m = 0,5 km en réalité.

$$\text{réel} = \text{carte} \times 50\,000$$

a) $7,4 \times 50\,000 = 370\,000$ cm = 3 700 m = 3,7 km.

b) On convertit dans la même unité : 12 km = 1 200 000 cm. Puis $1\,200\,000 \div 50\,000 = 24$ cm.

Contrôle par le raisonnement : 1 cm pour 0,5 km, donc 2 cm par kilomètre et $12 \times 2 = 24$ cm. Piège : diviser 12 par 50 000 sans convertir les kilomètres donne un résultat absurde

(0,00024).

Réponse. a) 3,7 km · b) 24 cm.

Correction de l'exercice 3 – Une fourmi agrandie

a) On exprime les deux longueurs dans la même unité : 6 cm = 60 mm.

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur la photo}}{\text{longueur réelle}} = \frac{60}{8} = 7,5$$

L'échelle est 7,5 : c'est un **agrandissement**, la photo est 7,5 fois plus grande que l'insecte.

b) Pour revenir à la réalité, on divise par l'échelle : 2,4 cm = 24 mm, et $24 \div 7,5 = 3,2$ mm.

Contrôle : $3,2 \times 7,5 = 24$ mm. Une échelle supérieure à 1 agrandit, une échelle inférieure à 1 (comme $\frac{1}{200}$) réduit.

Réponse. a) 7,5 · b) 3,2 mm.

Correction de l'exercice 4 – La voiture miniature

À l'échelle $\frac{1}{43}$, chaque longueur de la miniature est 43 fois plus petite que la longueur réelle :

$$\text{miniature} = \text{réel} \div 43$$

— Longueur : 4,30 m = 430 cm, et $430 \div 43 = 10$ cm.

— Largeur : 1,72 m = 172 cm, et $172 \div 43 = 4$ cm.

Contrôle : $10 \times 43 = 430$ cm et $4 \times 43 = 172$ cm. La miniature mesure 10 cm sur 4 cm : elle tient dans la main, ce qui est cohérent.

Réponse. 10 cm de long et 4 cm de large.

Correction de l'exercice 5 – La chambre sur le plan

a) À l'échelle $\frac{1}{100}$, 1 cm sur le plan représente 100 cm = 1 m en réalité :

$$\text{réel} = \text{plan} \times 100$$

— Longueur : $5 \times 100 = 500$ cm = 5 m.

— Largeur : $3,5 \times 100 = 350$ cm = 3,5 m.

b) On calcule l'aire avec les dimensions **réelles** :

$$A = L \times \ell = 5 \times 3,5 = 17,5 \text{ m}^2$$

Piège : l'aire du plan ($5 \times 3,5 = 17,5 \text{ cm}^2$) n'est pas à multiplier par 100 ; il faut d'abord convertir chaque longueur, puis calculer l'aire.

Réponse. a) 5 m sur 3,5 m · b) 17,5 m².

Correction de l'exercice 6 – La cycliste

À vitesse constante, la distance est proportionnelle à la durée. On passe par 20 min, qui est le tiers d'une heure :

$$d = v \times t$$

Durée	60 min	20 min	40 min	80 min
Distance (km)	18	6	12	24

- En 20 min : $18 \div 3 = 6$ km.
- a) 40 min, c'est 2×20 min : $2 \times 6 = 12$ km.
- b) 1 h 20 min = 80 min = 4×20 min : $4 \times 6 = 24$ km (ou $18 + 6 = 24$ km).

Piège : 40 min ne s'écrivent pas 0,40 h mais $\frac{2}{3}$ h.

Réponse. a) 12 km · b) 24 km.

Correction de l'exercice 7 - Calculer une vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la distance parcourue en une heure :

$$v = \frac{d}{t}$$

On convertit la durée en heures : 2 h 30 min = 2,5 h.

$$v = \frac{150}{2,5} = 60 \text{ km/h}$$

Contrôle : en 2 h à 60 km/h, l'autocar fait 120 km ; en 30 min, 30 km de plus ; total 150 km. Piège : diviser par 2,30 (au lieu de 2,5) donnerait environ 65 km/h, un résultat faux.

Réponse. 60 km/h.

Correction de l'exercice 8 - Combien de temps de randonnée ?

On cherche une durée, connaissant la distance et la vitesse :

$$t = \frac{d}{v}$$

$$\text{a) } t = \frac{13,5}{4,5} = 3 \text{ h.}$$

$$\text{b) } t = \frac{6}{4,5} = \frac{60}{45} = \frac{4}{3} \text{ h. Or } \frac{4}{3} \text{ h} = 1 \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h, et } \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min : il met 1 h 20 min.}$$

Contrôle de b) : en 1 h il fait 4,5 km, en 20 min le tiers de 4,5, soit 1,5 km ; total 6 km. Piège : 1,33 h ne vaut pas 1 h 33 min.

Réponse. a) 3 h · b) 1 h 20 min.

Correction de l'exercice 9 - Deux cyclistes sur un graphique

a) Chaque tracé est une droite qui passe par l'origine : c'est la représentation d'une situation de proportionnalité.

b) On lit un point de chaque droite, par exemple à 2 h : A a parcouru 30 km, B 40 km.

$$v = \frac{d}{t} \quad v_A = \frac{30}{2} = 15 \text{ km/h} \quad v_B = \frac{40}{2} = 20 \text{ km/h}$$

B est le plus rapide : sa droite monte plus vite.

c) 1 h 30 min = 1,5 h : A parcourt $15 \times 1,5 = 22,5$ km et B $20 \times 1,5 = 30$ km.

Réponse. b) A : 15 km/h, B : 20 km/h, B est le plus rapide · c) 22,5 km et 30 km.

Correction de l'exercice 10 - Plus rapide qu'un scooter ?

a) La vitesse est la distance parcourue en une seconde :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100}{10} = 10 \text{ m/s}$$

b) 36 km/h, c'est 36 000 m parcourus en 1 h, c'est-à-dire en 3 600 s :

$$v = \frac{36\,000}{3\,600} = 10 \text{ m/s}$$

Les deux vitesses sont égales. Autre méthode : pour passer des m/s aux km/h, on multiplie par 3,6 ; le sprinteur court donc à $10 \times 3,6 = 36 \text{ km/h}$, exactement comme le scooter.

Réponse. a) 10 m/s · b) 10 m/s : les vitesses sont égales.

Correction de l'exercice 11 - Remplir la baignoire

À débit constant, le volume d'eau est proportionnel à la durée :

$$\text{volume} = \text{débit} \times \text{durée}$$

a) On cherche la durée : $180 \div 12 = 15 \text{ min}$.

b) 4 min 30 s = 4,5 min, donc le volume vaut $12 \times 4,5 = 54 \text{ L}$.

Durée (min)	1	4,5	15
Volume (L)	12	54	180

Contrôle de b) : en 4 min, 48 L ; en 30 s, la moitié de 12 L, soit 6 L ; total 54 L.

Réponse. a) 15 min · b) 54 L.

Correction de l'exercice 12 - Adapter une recette

Les quantités sont proportionnelles au nombre de personnes. On passe par **une** personne :

$$\text{quantité pour 8} = \frac{\text{quantité pour 6}}{6} \times 8$$

Personnes	6	1	8
Farine (g)	180	30	240
Œufs	3	0,5	4
Sucre (g)	120	20	160
Beurre (g)	90	15	120

— Farine : $180 \div 6 = 30 \text{ g}$ par personne, puis $30 \times 8 = 240 \text{ g}$.

— Œufs : $3 \div 6 = 0,5$, puis $0,5 \times 8 = 4 \text{ œufs}$.

Autre méthode : $8 = 6 + 2$ et 2 personnes, c'est le tiers de 6 ; on ajoute le tiers de chaque quantité ($180 + 60 = 240 \text{ g}$ de farine).

Réponse. 240 g de farine, 4 œufs, 160 g de sucre, 120 g de beurre.

Correction de l'exercice 13 - Le carrelage de la salle de bains

a) On augmente la surface de 10 % :

$$7,5 \times \frac{10}{100} = 0,75 \text{ m}^2 \quad 7,5 + 0,75 = 8,25 \text{ m}^2$$

b) Le prix est proportionnel à la surface, de coefficient 28 € par m^2 :

$$\text{prix} = 28 \times 8,25 = 231 \text{ €}$$

Calcul détaillé : $28 \times 8 = 224$ et $28 \times 0,25 = 7$, total 231 €. Il faut acheter 8,25 m² de carrelage, pour 231 €. Piège : on paie la surface **achetée** (chutes comprises), pas seulement la surface du sol.

Réponse. a) 8,25 m² · b) 231 €.

Correction de l'exercice 14 - La course d'orientation

a) **Échelle** : 1 cm sur la carte représente 25 000 cm = 250 m.

$$32 \times 25\,000 = 800\,000 \text{ cm} = 8\,000 \text{ m} = 8 \text{ km}$$

b) **Vitesse** : on cherche une durée, connaissant la distance et la vitesse.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{8}{8} = 1 \text{ h}$$

Elle mettra 1 h pour parcourir les 8 km. Deux outils se sont succédé : l'échelle pour passer de la carte au terrain, puis la vitesse pour passer de la distance à la durée ; à chaque étape, on vérifie les unités (cm, puis km, puis h).

Réponse. a) 8 km · b) 1 h.

Correction de l'exercice 15 - Le voyage en voiture

a) À l'échelle $\frac{1}{1\,000\,000}$, 1 cm représente 1 000 000 cm = 10 km :

$$21,5 \times 10 = 215 \text{ km}$$

b) On cherche une durée :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{215}{86} = 2,5 \text{ h}$$

soit 2 h 30 min. Contrôle : $86 \times 2,5 = 215 \text{ km}$.

c) La consommation est proportionnelle à la distance : 6 L pour 100 km, donc 0,06 L par km.

$$215 \times 0,06 = 12,9 \text{ L}$$

Le trajet de 215 km dure 2 h 30 min et consomme 12,9 L d'essence.

Réponse. a) 215 km · b) 2 h 30 min · c) 12,9 L.