Plaquette 4 – Calculer et interpréter une moyenne

Statistiques — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour la moyenne.

— **Moyenne** d'une liste de N valeurs :

$$\overline{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{N}$$

— **Moyenne pondérée** (tableau d'effectifs, ou coefficients) : chaque valeur est multipliée par son effectif (ou son coefficient) :

$$\overline{x} = \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

— On peut retrouver la **somme** à partir de la moyenne : somme $= \overline{x} \times N$.

— Ajouter le même nombre à toutes les valeurs ajoute ce nombre à la moyenne.

— Deux séries de même moyenne peuvent être très différentes : on compare aussi la répartition des valeurs (combien sont proches de la moyenne, combien en sont loin).

— La moyenne est sensible aux **valeurs extrêmes** : une seule valeur très grande peut la tirer vers le haut.

— La moyenne de deux groupes n'est pas la moyenne de leurs moyennes, sauf s'ils ont le même effectif.

Correction de l'exercice 1 – Une moyenne de notes

a) On additionne les notes, puis on divise par le nombre de notes :

$$\overline{x} = \frac{12 + 15 + 8 + 14 + 11}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

b) Notes supérieures à 12 : 15 et 14, soit 2 notes sur 5.

Contrôle : la moyenne est bien comprise entre la plus petite note (8) et la plus grande (15).

Réponse. a) 12 · b) 2 notes.

Correction de l'exercice 2 – Six chronos au 100 m

a) On applique la formule de la moyenne avec $N = 6$:

$$\overline{x} = \frac{14{,}2 + 13{,}8 + 15{,}1 + 14{,}5 + 13{,}9 + 14{,}3}{6} = \frac{85{,}8}{6} = 14{,}3 \text{ s}$$

Astuce pour additionner : $14{,}2 + 13{,}8 = 28$ et $14{,}5 + 14{,}3 = 28{,}8$, puis $28 + 28{,}8 + 15{,}1 + 13{,}9 = 85{,}8$.

b) Plus rapide signifie un temps inférieur à 14,3 s : 14,2 ; 13,8 ; 13,9, soit 3 courses sur 6 : fréquence $\frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\,\%$.

Piège : la course à 14,3 s est exactement égale à la moyenne, elle n'est pas « plus rapide ».

Réponse. a) 14,3 s · b) 50 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Enfants par famille

Chaque valeur apparaît plusieurs fois : on la multiplie par son effectif (moyenne pondérée).

$$\overline{x} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 5 + 4 \times 2}{25}$$

— Numérateur : $0 + 7 + 16 + 15 + 8 = 46$ enfants au total.

— Moyenne : $\frac{46}{25} = 1{,}84$.

Il y a en moyenne 1,84 enfant par famille. Une moyenne n’est pas forcément une valeur possible de la série : aucune famille n’a 1,84 enfant. Piège : diviser par 5 (le nombre de colonnes) au lieu de 25 (le nombre de familles).

Réponse. 1,84 enfant par famille.

Correction de l’exercice 4 – La moyenne lue sur un diagramme

On lit l’effectif de chaque note au-dessus des barres, puis on calcule la moyenne pondérée :

$$\overline{x} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4 \times 5 + 5 \times 4}{20}$$

— Numérateur : $2 + 6 + 18 + 20 + 20 = 66$ points.

— Moyenne : $\frac{66}{20} = 3{,}3$.

Au-dessus de 3,3 : les notes 4 et 5, soit $5 + 4 = 9$ élèves sur 20 : $\frac{9}{20} = 45\,\%$. Contrôle : $2 + 3 + 6 + 5 + 4 = 20$ élèves.

Réponse. Moyenne 3,3 sur 5 ; 45 %.

Correction de l’exercice 5 – Des notes avec coefficients

Un coefficient 2 signifie que la note compte comme si elle apparaissait deux fois. On divise par la **somme des coefficients** :

$$\overline{x} = \frac{14 \times 2 + 9 \times 1 + 16 \times 1}{2 + 1 + 1} = \frac{28 + 9 + 16}{4} = \frac{53}{4} = 13{,}25$$

Sa moyenne est 13,25. Sans les coefficients, on aurait $\frac{14 + 9 + 16}{3} = 13$: le coefficient 2 donne plus de poids au devoir surveillé, qui est au-dessus de 13, et fait monter la moyenne. Piège : diviser par 3 (le nombre de notes) au lieu de 4.

Réponse. 13,25.

Correction de l’exercice 6 – La note manquante

On raisonne sur la **somme** des notes : pour une moyenne de 13 sur 5 notes, il faut

$$\text{somme} = \overline{x} \times N = 13 \times 5 = 65$$

— Ses quatre notes font $11 + 13 + 9 + 15 = 48$ points.

— Il lui manque $65 - 48 = 17$ points.

Il doit obtenir 17. Contrôle : $\frac{11 + 13 + 9 + 15 + 17}{5} = \frac{65}{5} = 13$.

Réponse. 17.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Un nouveau joueur dans l’équipe

On ne connaît pas les tailles une à une, mais on retrouve leur **somme** à partir de la moyenne :

$$\text{somme} = \overline{x} \times N = 1{,}82 \times 5 = 9{,}10 \text{ m}$$

— Avec le nouveau joueur : $9{,}10 + 1{,}94 = 11{,}04$ m pour 6 joueurs.

— Nouvelle moyenne : $\dfrac{11{,}04}{6} = 1{,}84$ m.

La moyenne augmente de 2 cm, car le nouveau joueur est plus grand que la moyenne de départ. Piège : faire $\dfrac{1{,}82 + 1{,}94}{2} = 1{,}88$ m, comme si l’ancienne équipe ne comptait qu’un joueur.

Réponse. 1,84 m.

Correction de l’exercice 8 – Une semaine d’hiver

a) On additionne les nombres relatifs, en regroupant les négatifs :

$$\overline{x} = \frac{-3 + 2 + 5 + (-1) + 0 + 4 + 6}{7} = \frac{17 - 4}{7} = \frac{13}{7} \approx 1{,}9 \text{ °C}$$

b) Températures négatives : -3 et -1, soit 2 jours sur 7 : $\dfrac{2}{7} \approx 0{,}29$, environ 29 % (0 n’est ni positif strictement ni négatif strictement).

Piège de a) : -3 et -1 font diminuer la somme ; on calcule $17 - 4$, pas $17 + 4$.

Réponse. a) environ 1,9 °C · b) 2 jours, environ 29 %.

Correction de l’exercice 9 – Deux joueurs de fléchettes

a) $\overline{x} = \dfrac{\text{somme des scores}}{5}$:

— Ali : $\dfrac{12 + 14 + 13 + 15 + 11}{5} = \dfrac{65}{5} = 13$.

— Bea : $\dfrac{5 + 20 + 18 + 9 + 13}{5} = \dfrac{65}{5} = 13$.

b) À moins de 2 points de 13, c’est-à-dire entre 11 et 15 (exclus) : Ali, 12, 14, 13, soit 3 volées ; Bea, seulement 13, soit 1 volée.

c) Les moyennes sont égales : elles ne permettent pas de départager. Les scores d’Ali restent proches de 13, ceux de Bea en sont souvent loin. On choisit **Ali**, le plus régulier.

Réponse. a) 13 et 13 · b) 3 et 1 · c) Ali.

Correction de l’exercice 10 – La moyenne de deux classes

b) On retrouve la somme des notes de chaque classe, somme $= \overline{x} \times N$:

— Classe A : $12 \times 20 = 240$ points ; classe B : $14{,}5 \times 30 = 435$ points.

$$\overline{x} = \frac{240 + 435}{20 + 30} = \frac{675}{50} = 13{,}5$$

a) L’élève a tort : 13,25 donne autant de poids aux deux classes, alors que B compte plus d’élèves. La vraie moyenne, 13,5, est plus proche de celle de B. La moyenne des moyennes ne convient que si les deux groupes ont le même effectif.

Réponse. a) faux · b) 13,5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Une semaine de températures

On lit les cinq températures sur la courbe : 14 ; 17 ; 15 ; 19 ; 20 °C.

$$\overline{x} = \frac{14 + 17 + 15 + 19 + 20}{5} = \frac{85}{5} = 17 \text{ °C}$$

Elle a été dépassée jeudi (19 °C) et vendredi (20 °C). Sur le graphique, la moyenne correspond à une droite horizontale à 17 °C : deux jours sont au-dessous (lundi, mercredi), deux au-dessus (jeudi, vendredi), et mardi est exactement à la moyenne.

Réponse. Moyenne 17 °C ; jeudi et vendredi.

Correction de l’exercice 12 – Deux points de bonus pour tous

a) Avant le bonus :

$$\overline{x} = \frac{8 + 11 + 13 + 16}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

b) Après le bonus, les notes sont 10 ; 13 ; 15 ; 18 :

$$\overline{x} = \frac{10 + 13 + 15 + 18}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

La moyenne a augmenté de 2 points, comme chaque note. On pouvait le prévoir : la somme augmente de $4 \times 2 = 8$, donc la moyenne de $8 \div 4 = 2$.

Réponse. a) 12 · b) 14 : +2, comme chaque note.

Correction de l’exercice 13 – Le salaire moyen

a) On applique la formule de la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{1\,800 + 1\,900 + 2\,000 + 2\,100 + 8\,200}{5} = \frac{16\,000}{5} = 3\,200 \text{ €}$$

b) Quatre employés sur cinq gagnent moins de 3 200 € : le salaire moyen ne représente pas bien la situation. La valeur extrême, 8 200 €, tire la moyenne vers le haut. Sans elle, la moyenne des quatre autres salaires serait $\frac{7\,800}{4} = 1\,950$ €.

Réponse. a) 3 200 € · b) quatre ; non, la moyenne est tirée par la valeur extrême.

Correction de l’exercice 14 – Viser 12 de moyenne

On raisonne sur les points. Après le dernier contrôle, la somme des coefficients vaudra $1 + 1 + 2 + 2 = 6$. Pour 12 de moyenne, il faut

$$\text{points} = \overline{x} \times \text{somme des coefficients} = 12 \times 6 = 72$$

— Elle a déjà $11 \times 1 + 13 \times 1 + 10 \times 2 = 11 + 13 + 20 = 44$ points.
— Il lui manque $72 - 44 = 28$ points, apportés par une note comptant double : $28 \div 2 = 14$.

Elle doit obtenir au moins 14. Contrôle : $\frac{44 + 14 \times 2}{6} = \frac{72}{6} = 12$. Une note plus haute donnerait plus de 12.

Réponse. Au moins 14.

Correction de l’exercice 15 – Deux classes au même quiz

a) On calcule chaque moyenne pondérée, en ignorant les effectifs nuls :

$$\overline{x}_A = \frac{4 \times 2 + 6 \times 5 + 7 \times 8 + 8 \times 6 + 9 \times 4}{25} = \frac{178}{25} = 7{,}12$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overline{x}_B = \frac{2\times 3 + 5\times 4 + 7\times 5 + 9\times 6 + 10\times 7}{25} = \frac{185}{25} = 7{,}4$$

b) Au moins 9 : A, 4 élèves (16 %) ; B, 6 + 7 = 13 élèves (52 %). Au plus 4 : A, 2 élèves (8 %) ; B, 3 élèves (12 %).

c) La classe B a une moyenne un peu plus haute et beaucoup de très bonnes notes, mais aussi plus de notes très basses ; les notes de la classe A sont plus regroupées autour de 7.

Réponse. a) A : 7,12 ; B : 7,4 · b) 16 % et 52 % ; 8 % et 12 % · c) B meilleure en moyenne, A plus homogène.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).