

Plaquette 4 – Moyenne et étendue

Statistiques – Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour la moyenne et l'étendue.

- **Moyenne** d'une liste de N valeurs :

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{N}$$

- **Moyenne pondérée** (tableau d'effectifs, ou coefficients) : chaque valeur est multipliée par son effectif (ou son coefficient) :

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

- On peut retrouver la **somme** à partir de la moyenne : $\text{somme} = \bar{x} \times N$.
- **Étendue** = plus grande valeur – plus petite valeur. Plus elle est grande, plus la série est **dispersée**.
- Ajouter le même nombre à toutes les valeurs ajoute ce nombre à la moyenne et ne change pas l'étendue.
- La moyenne est sensible aux **valeurs extrêmes** : une seule valeur très grande peut la tirer vers le haut.
- La moyenne de deux groupes n'est pas la moyenne de leurs moyennes, sauf s'ils ont le même effectif.

Correction de l'exercice 1 – Une moyenne de notes

- a) On additionne les notes, puis on divise par le nombre de notes :

$$\bar{x} = \frac{12 + 15 + 8 + 14 + 11}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

- b) L'étendue est l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur :

$$\text{étendue} = 15 - 8 = 7$$

Sa moyenne est 12 sur 20 et ses notes s'étalent sur 7 points. Contrôle : la moyenne est bien comprise entre la plus petite note (8) et la plus grande (15).

Réponse. a) 12 · b) 7.

Correction de l'exercice 2 – Six chronos au 100 m

- a) On applique la formule de la moyenne avec $N = 6$:

$$\bar{x} = \frac{14,2 + 13,8 + 15,1 + 14,5 + 13,9 + 14,3}{6} = \frac{85,8}{6} = 14,3 \text{ s}$$

Astuce pour additionner : $14,2 + 13,8 = 28$ et $14,5 + 14,3 = 28,8$, puis $28 + 28,8 + 15,1 + 13,9 = 85,8$.

- b) Étendue = $15,1 - 13,8 = 1,3 \text{ s}$.

Son temps moyen est 14,3 s ; ses temps varient de 1,3 s entre la meilleure et la moins bonne course.

Réponse. a) 14,3 s · b) 1,3 s.

Correction de l'exercice 3 - Enfants par famille

Chaque valeur apparaît plusieurs fois : on la multiplie par son effectif (moyenne pondérée).

$$\bar{x} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 5 + 4 \times 2}{25}$$

- Numérateur : $0 + 7 + 16 + 15 + 8 = 46$ enfants au total.
- Moyenne : $\frac{46}{25} = 1,84$.

Il y a en moyenne 1,84 enfant par famille. Une moyenne n'est pas forcément une valeur possible de la série : aucune famille n'a 1,84 enfant. Piège : diviser par 5 (le nombre de colonnes) au lieu de 25 (le nombre de familles).

Réponse. 1,84 enfant par famille.

Correction de l'exercice 4 - La moyenne lue sur un diagramme

On lit l'effectif de chaque note au-dessus des barres, puis on calcule la moyenne pondérée :

$$\bar{x} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4 \times 5 + 5 \times 4}{20}$$

- Numérateur : $2 + 6 + 18 + 20 + 20 = 66$ points.
- Moyenne : $\frac{66}{20} = 3,3$.

Étendue : $5 - 1 = 4$ (on prend les **notes** extrêmes, pas les effectifs). Contrôle : $2 + 3 + 6 + 5 + 4 = 20$ élèves.

Réponse. Moyenne 3,3 sur 5 ; étendue 4.

Correction de l'exercice 5 - Des notes avec coefficients

Un coefficient 2 signifie que la note compte comme si elle apparaissait deux fois. On divise par la **somme des coefficients** :

$$\bar{x} = \frac{14 \times 2 + 9 \times 1 + 16 \times 1}{2 + 1 + 1} = \frac{28 + 9 + 16}{4} = \frac{53}{4} = 13,25$$

Sa moyenne est 13,25. Sans les coefficients, on aurait $\frac{14 + 9 + 16}{3} = 13$: le coefficient 2 donne plus de poids au devoir surveillé, qui est au-dessus de 13, et fait monter la moyenne. Piège : diviser par 3 (le nombre de notes) au lieu de 4.

Réponse. 13,25.

Correction de l'exercice 6 - La note manquante

On raisonne sur la **somme** des notes : pour une moyenne de 13 sur 5 notes, il faut

$$\text{somme} = \bar{x} \times N = 13 \times 5 = 65$$

- Ses quatre notes font $11 + 13 + 9 + 15 = 48$ points.
- Il lui manque $65 - 48 = 17$ points.

Il doit obtenir 17. Contrôle : $\frac{11 + 13 + 9 + 15 + 17}{5} = \frac{65}{5} = 13$.

Réponse. 17.

Correction de l'exercice 7 - Un nouveau joueur dans l'équipe

On ne connaît pas les tailles une à une, mais on retrouve leur **somme** à partir de la moyenne :

$$\text{somme} = \bar{x} \times N = 1,82 \times 5 = 9,10 \text{ m}$$

— Avec le nouveau joueur : $9,10 + 1,94 = 11,04 \text{ m}$ pour 6 joueurs.

— Nouvelle moyenne : $\frac{11,04}{6} = 1,84 \text{ m}$.

La moyenne augmente de 2 cm, car le nouveau joueur est plus grand que la moyenne de départ. Piège : faire $\frac{1,82 + 1,94}{2} = 1,88 \text{ m}$, comme si l'ancienne équipe ne comptait qu'un joueur.

Réponse. 1,84 m.

Correction de l'exercice 8 - Une semaine d'hiver

a) La plus grande valeur est 6, la plus petite -3 :

$$\text{étendue} = 6 - (-3) = 6 + 3 = 9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

b) On additionne les nombres relatifs, en regroupant les négatifs :

$$\bar{x} = \frac{-3 + 2 + 5 + (-1) + 0 + 4 + 6}{7} = \frac{17 - 4}{7} = \frac{13}{7} \approx 1,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Piège de a) : écrire $6 - 3 = 3$ oublie le signe ; de -3 à 6, il y a 3 degrés jusqu'à 0 puis 6 au-dessus, soit 9.

Réponse. a) $9 \text{ }^{\circ}\text{C}$ · b) environ $1,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Correction de l'exercice 9 - Deux joueurs de fléchettes

a) On calcule pour chacun :

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des scores}}{5} \quad \text{étendue} = \text{max} - \text{min}$$

— Ali : $\frac{12 + 14 + 13 + 15 + 11}{5} = \frac{65}{5} = 13$; étendue $15 - 11 = 4$.

— Bea : $\frac{5 + 20 + 18 + 9 + 13}{5} = \frac{65}{5} = 13$; étendue $20 - 5 = 15$.

b) Les moyennes sont égales : la moyenne ne permet pas de les départager. L'étendue d'Ali est bien plus petite : ses scores sont regroupés autour de 13. On choisit **Ali**, le plus régulier ; Bea alterne très bons et très mauvais scores.

Réponse. a) moyennes 13 et 13, étendues 4 et 15 · b) Ali.

Correction de l'exercice 10 - La moyenne de deux classes

b) On retrouve la somme des notes de chaque classe, $\text{somme} = \bar{x} \times N$:

— Classe A : $12 \times 20 = 240$ points ; classe B : $14,5 \times 30 = 435$ points.

$$\bar{x} = \frac{240 + 435}{20 + 30} = \frac{675}{50} = 13,5$$

a) L'élève a tort : 13,25 donne autant de poids aux deux classes, alors que B compte plus d'élèves. La vraie moyenne, 13,5, est plus proche de celle de B. La moyenne des moyennes ne convient que si les deux groupes ont le même effectif.

Réponse. a) faux · b) 13,5.

Correction de l'exercice 11 - Une semaine de températures

On lit les cinq températures sur la courbe : 14 ; 17 ; 15 ; 19 ; 20 °C.

$$\bar{x} = \frac{14 + 17 + 15 + 19 + 20}{5} = \frac{85}{5} = 17 \text{ °C}$$

Étendue : $20 - 14 = 6 \text{ °C}$.

Sur le graphique, la moyenne correspond à une droite horizontale à 17 °C : deux jours sont au-dessous (lundi, mercredi), deux au-dessus (jeudi, vendredi), et mardi est exactement à la moyenne.

Réponse. Moyenne 17 °C ; étendue 6 °C.

Correction de l'exercice 12 - Deux points de bonus pour tous

a) Avant le bonus :

$$\bar{x} = \frac{8 + 11 + 13 + 16}{4} = \frac{48}{4} = 12 \quad \text{étendue} = 16 - 8 = 8$$

b) Après le bonus, les notes sont 10 ; 13 ; 15 ; 18 :

$$\bar{x} = \frac{10 + 13 + 15 + 18}{4} = \frac{56}{4} = 14 \quad \text{étendue} = 18 - 10 = 8$$

La moyenne a augmenté de 2 points, comme chaque note ; l'étendue n'a pas changé, car l'écart entre la meilleure et la moins bonne note reste le même. On pouvait le prévoir : la somme augmente de $4 \times 2 = 8$, donc la moyenne de $8 \div 4 = 2$.

Réponse. a) 12 et 8 · b) 14 et 8.

Correction de l'exercice 13 - Le salaire moyen

a) On applique la formule de la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1\,800 + 1\,900 + 2\,000 + 2\,100 + 8\,200}{5} = \frac{16\,000}{5} = 3\,200 \text{ €}$$

Étendue : $8\,200 - 1\,800 = 6\,400 \text{ €}$.

b) Quatre employés sur cinq gagnent moins de 3 200 € : le salaire moyen ne représente pas bien la situation. La valeur extrême, 8 200 €, tire la moyenne vers le haut. Sans elle, la moyenne des quatre autres salaires serait $\frac{7\,800}{4} = 1\,950 \text{ €}$. La grande étendue signale justement une série très dispersée.

Réponse. a) 3 200 € et 6 400 € · b) quatre ; non, la moyenne est tirée par la valeur extrême.

Correction de l'exercice 14 - Viser 12 de moyenne

On raisonne sur les points. Après le dernier contrôle, la somme des coefficients vaudra $1 + 1 + 2 + 2 = 6$. Pour 12 de moyenne, il faut

$$\text{points} = \bar{x} \times \text{somme des coefficients} = 12 \times 6 = 72$$

— Elle a déjà $11 \times 1 + 13 \times 1 + 10 \times 2 = 11 + 13 + 20 = 44$ points.

— Il lui manque $72 - 44 = 28$ points, apportés par une note comptant double : $28 \div 2 = 14$.

Elle doit obtenir au moins 14. Contrôle : $\frac{44 + 14 \times 2}{6} = \frac{72}{6} = 12$. Une note plus haute donnerait plus de 12.

Réponse. Au moins 14.

Correction de l'exercice 15 - Deux classes au même quiz

a) On calcule chaque moyenne pondérée, en ignorant les effectifs nuls :

$$\bar{x}_A = \frac{4 \times 2 + 6 \times 5 + 7 \times 8 + 8 \times 6 + 9 \times 4}{25} = \frac{178}{25} = 7,12$$

$$\bar{x}_B = \frac{2 \times 3 + 5 \times 4 + 7 \times 5 + 9 \times 6 + 10 \times 7}{25} = \frac{185}{25} = 7,4$$

Étendues : A, $9 - 4 = 5$; B, $10 - 2 = 8$ (les notes extrêmes **obtenues**, pas celles du tableau avec un effectif nul).

b) La classe B a une moyenne un peu plus haute, mais ses résultats sont plus dispersés : 7 élèves ont 10, et 3 élèves n'ont que 2. La classe A est plus homogène.

Réponse. a) A : 7,12 et 5 ; B : 7,4 et 8 · b) B meilleure en moyenne, A plus homogène.