

Plaquette 1 - Centre de symétrie, images et comparaison avec la symétrie axiale

Symétrie centrale — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ce qu'il faut savoir sur la symétrie centrale.

- Le **symétrique** M' d'un point M par rapport à un point O est tel que O est le **milieu** du segment $[MM']$:

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad M, O, M' \text{ alignés}$$

- Conséquence pour les longueurs :

$$MM' = 2 \times OM$$

- Le symétrique de O est O lui-même : c'est le **seul** point invariant.
- Un **centre de symétrie** d'une figure est un point O tel que la figure est sa propre image par la symétrie de centre O (on la retrouve après un demi-tour).
- La symétrie centrale **conserve** : les longueurs, les mesures d'angles, les aires, l'alignement, les milieux et le **parallélisme**.
- Elle transforme une droite en une droite **parallèle** : c'est une différence majeure avec la symétrie axiale.
- Une symétrie centrale correspond à un **demi-tour** (180°) autour de O : pas d'« effet miroir ».
- Centres de symétrie usuels : le parallélogramme (point d'intersection des diagonales), le rectangle, le losange, le carré, le cercle (son centre). Un triangle n'a **jamais** de centre de symétrie.
- Pour construire : on trace la demi-droite $[MO)$ et on reporte la longueur OM au-delà de O .

Correction de l'exercice 1 - Définition du symétrique

On revient à la **définition** : M' est le symétrique de M par rapport à O quand O est le milieu de $[MM']$.

- Par définition, O est le **milieu** du segment $[MM']$.
- Le milieu partage le segment en deux parties égales, ce que montrent les codages de la figure :

$$OM = OM'$$

- c) **Oui** : O appartient au segment $[MM']$, donc les trois points sont alignés.
- Ces trois propriétés donnent la méthode de construction : on prolonge $[MO)$ au-delà de O , sur une longueur égale à OM .

Réponse. a) son milieu · b) $OM = OM'$ · c) oui, alignés.

Correction de l'exercice 2 - Point invariant

On cherche le point O' tel que O soit le milieu de $[OO']$.

- Un segment $[OO']$ dont le milieu est O a une longueur nulle : $OO' = 2 \times 0 = 0$, donc $O' = O$. Le symétrique de O est O lui-même.

- Pour tout autre point M , on a $MM' = 2 \times OM$ avec $OM \neq 0$, donc $M' \neq M$: c'est le **seul** point invariant.
- Différence importante avec la symétrie axiale : dans une symétrie axiale, **tous** les points de l'axe sont invariants (il y en a une infinité), alors qu'une symétrie centrale n'en a qu'un.

Réponse. O lui-même, et c'est le seul point invariant.

Correction de l'exercice 3 - Longueur du segment point-image

O est le milieu de $[MM']$: le segment $[MM']$ est formé de deux moitiés de même longueur OM et OM' . D'où la formule :

$$MM' = 2 \times OM$$

- a) $MM' = 2 \times 3,5 = 7$ cm.
- b) On lit la formule dans l'autre sens : $OM = MM' \div 2 = 9 \div 2 = 4,5$ cm.
- Piège fréquent : répondre $OM = 9$ cm en oubliant que O est au **milieu**. La distance OM est toujours la moitié de MM' .

Réponse. a) $MM' = 7$ cm · b) $OM = 4,5$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Construction sur quadrillage

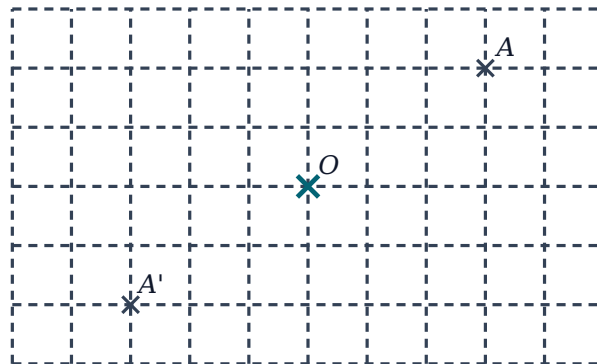
Méthode : on compte le déplacement de A jusqu'à O , puis on le **prolonge** d'autant au-delà de O .

- Pour aller de A à O , on fait 3 carreaux **à gauche** et 2 carreaux **en bas**.
- On refait exactement le même déplacement à partir de O : A' est à 3 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de O .
- Autrement dit, les deux décalages de A par rapport à O changent de sens.
- Contrôle : O est bien le milieu de $[AA']$, puisque

$$OA' = OA$$

et que les trois points A , O , A' sont alignés : on a fait deux fois le même déplacement.

Réponse. 3 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de O .



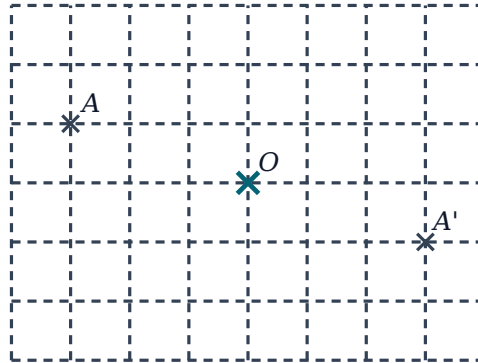
Correction de l'exercice 5 - Retrouver le centre

Le centre d'une symétrie centrale est le **milieu** du segment qui joint un point à son image :

$$O = \text{milieu de } [AA']$$

- Pour aller de A à A' , on fait 6 carreaux à droite et 2 carreaux en bas.
- Le milieu est atteint à mi-chemin : $6 \div 2 = 3$ carreaux à droite et $2 \div 2 = 1$ carreau en bas à partir de A .
- On place O à cet endroit. Contrôle : de O à A' , il reste bien 3 carreaux à droite et 1 en bas.
- Un seul couple (point, image) suffit donc pour retrouver le centre.

Réponse. O est à 3 carreaux à droite et 1 carreau en bas de A (milieu de $[AA']$).



Correction de l'exercice 6 - Centres de symétrie usuels

On teste chaque figure avec un **demi-tour** autour d'un point : si elle se superpose à elle-même, ce point est un centre de symétrie.

- Oui** : le point d'intersection de ses **diagonales**, qui se coupent en leur milieu. C'est même une propriété caractéristique du parallélogramme.
- Oui** : son **centre** O , car tout point M du cercle a son symétrique M' sur le cercle, avec

$$OM' = OM = \text{rayon}$$

- c) **Non** : aucun triangle n'a de centre de symétrie (un demi-tour transforme une pointe en un côté).
- d) **Oui** : le point d'intersection de ses diagonales (le rectangle est un parallélogramme particulier).
- À retenir : le triangle équilatéral a 3 **axes** de symétrie, mais aucun **centre**.

Réponse. a) oui (croisement des diagonales) · b) oui (le centre) · c) non · d) oui.

Correction de l'exercice 7 - Propriétés conservées

Une symétrie centrale est un **demi-tour** : elle déplace la figure sans la déformer. Elle conserve donc les longueurs, les angles et les aires.

$$A'B' = AB \quad \widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

- Côté : 6 cm (inchangé).
- Angle : 48° (inchangé).
- Aire : 30 cm^2 (inchangée).
- Elle conserve aussi le parallélisme, l'alignement et les milieux. Seule la **position** de la figure change : elle a tourné d'un demi-tour autour du centre.

Réponse. 6 cm, 48° et 30 cm^2 : tout est conservé.

Correction de l'exercice 8 – Image d'une droite

- a) L'image d'une droite est une **droite** : la symétrie conserve l'alignement, donc tous les points de d ont leur image sur la droite $(P'Q')$.
- b) Propriété du cours : l'image d'une droite par une symétrie centrale lui est **parallèle**.
 $d' \parallel d$
- On peut le vérifier sur la figure : $PQP'Q'$ a ses diagonales $[PP']$ et $[QQ']$ qui se coupent en leur milieu O , c'est un parallélogramme, donc $(PQ) \parallel (P'Q')$.
- c) Si d passe par O , alors $d' = d$: la droite est **sa propre image** (elle est globalement invariante).
- Comparaison utile : par une symétrie **axiale**, l'image d'une droite n'est en général **pas** parallèle à la droite de départ.

Réponse. a) une droite · b) parallèle à d · c) $d' = d$.

Correction de l'exercice 9 – Image d'un triangle

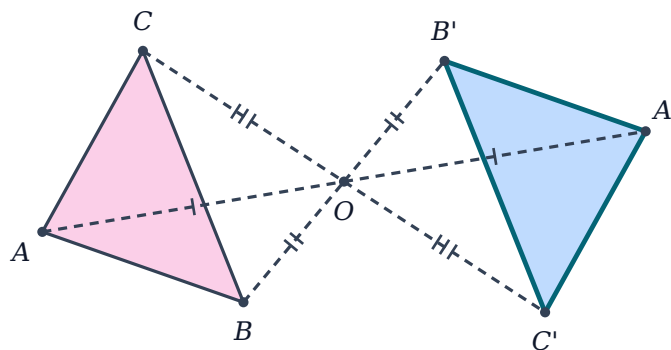
Pour l'image d'un polygone, on construit l'image de **chaque sommet**, puis on relie les images dans le même ordre.

- Pour chaque sommet, on trace la demi-droite qui part du sommet et passe par O , puis on reporte la même longueur au-delà :

$$OA' = OA \quad OB' = OB \quad OC' = OC$$

- On relie A', B', C' : on obtient le triangle $A'B'C'$.
- Nature : c'est un triangle **superposable** à ABC (mêmes longueurs, mêmes angles), retourné d'un demi-tour. Le sommet le plus haut, C , a une image C' qui est le sommet le plus bas.
- Contrôle : $(A'B') \parallel (AB)$, $(B'C') \parallel (BC)$, $(C'A') \parallel (CA)$; les côtés de l'image sont parallèles à ceux de ABC .

Réponse. Un triangle superposable à ABC , retourné d'un demi-tour, ses côtés parallèles à ceux de ABC .



Correction de l'exercice 10 – Comparer les deux symétries

Propriété	Symétrie axiale	Symétrie centrale
Conserve les longueurs	oui	oui
Points invariants	tous ceux de l'axe	seulement le centre
Image d'une droite parallèle	non (en général)	oui (toujours)

- Les deux symétries conservent longueurs, angles et aires : $A'B' = AB$ dans les deux cas.
- Elles diffèrent par les points invariants (une droite entière contre un seul point) et par le parallélisme des images de droites.
- Elles diffèrent aussi par la construction : pour l'axiale, M' est sur la **perpendiculaire** à l'axe passant par M ; pour la centrale, M' est sur la droite (MO) :

axiale : $(MM') \perp (d)$ centrale : O milieu de $[MM']$

- Autre différence pratique : la symétrie axiale « retourne » la figure comme un miroir, la symétrie centrale la fait pivoter d'un demi-tour.

Réponse. Longueurs : oui/oui · invariants : l'axe / le centre seul · parallélisme : non/oui.

Correction de l'exercice 11 - Symétrie centrale et parallélogramme

On utilise la propriété du cours : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur **milieu**.

- O est le milieu de $[AC]$, donc le symétrique de A par rapport à O est C .
- De même, O est le milieu de $[BD]$, donc le symétrique de B est D . L'image du segment $[AB]$ est le segment $[CD]$.
- La symétrie conserve les longueurs, et l'image d'une droite lui est parallèle :

$$CD = AB \quad \text{et} \quad (CD) \parallel (AB)$$

- C'est ainsi que l'on **démontre** les propriétés du parallélogramme : côtés opposés parallèles et de même longueur.

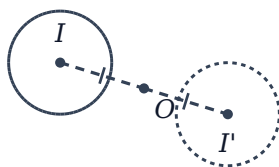
Réponse. a) C · b) le segment $[CD]$ · c) $AB = CD$ et $(AB) \parallel (CD)$.

Correction de l'exercice 12 - Image d'un cercle

Un cercle est défini par son **centre** et son **rayon** : on cherche l'image de chacun.

- Les longueurs sont conservées, donc le rayon aussi : C' a un rayon de **4 cm**.
 - Son centre I' est le symétrique de I par rapport à O :
- $$O \text{ milieu de } [II'] \quad \text{donc} \quad OI' = OI$$
- Si $I = O$, alors $I' = O$ et le rayon est le même : le cercle est **sa propre image**. Le centre d'un cercle est donc un centre de symétrie du cercle.

Réponse. a) 4 cm · b) au symétrique I' de I · c) le cercle est sa propre image.



L'image du cercle, en pointillé, a le même rayon.

Correction de l'exercice 13 - Lettres et centres de symétrie

On imagine un demi-tour autour du centre de la lettre (on peut aussi tourner la feuille « tête en bas ») : la lettre a un centre de symétrie si elle se retrouve identique.

- a) **Oui** : la lettre S se retrouve identique après un demi-tour.

- b) **Oui** : la lettre H aussi (elle possède en outre deux axes de symétrie).
- c) **Non** : la lettre A a un axe de symétrie vertical, mais pas de centre (le demi-tour la met « à l'envers », la pointe en bas).
- d) **Oui** : la lettre N est invariante par demi-tour, bien qu'elle n'ait aucun axe de symétrie.
- Cas remarquables : S et N ont un centre **sans** axe ; A a un axe **sans** centre ; H a les deux. Un demi-tour correspond à un angle de 180° .

Réponse. a) oui · b) oui · c) non · d) oui.

Correction de l'exercice 14 - Problème : compléter une figure

Pour que O soit centre de symétrie, la figure doit contenir l'image de **chacun** de ses éléments.

- a) L'image P' est sur la droite (PO) , de l'autre côté de O , à la même distance : $OP' = 5$ cm. On a donc $PP' = 2 \times 5 = 10$ cm.
- b) La longueur est conservée : l'image mesure **8 cm**.
- c) L'extrémité située en O est **invariante** : les deux segments se rejoignent en O .
- Résultat : les deux segments sont alignés et forment un segment unique dont O est le milieu :

$$8 + 8 = 16 \text{ cm}$$

Réponse. a) à 5 cm de l'autre côté de O , sur (PO) · b) 8 cm · c) elle ne bouge pas.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

- a) **Vrai**. Longueurs, angles et aires sont conservés.
- b) **Faux**. Aucun triangle n'a de centre de symétrie.
- c) **Vrai**. Si la droite ne passe pas par le centre, son image lui est parallèle ; si elle passe par le centre, elle est sa propre image.
- d) **Faux**. Il n'y a qu'**un** point invariant : le centre. C'est la symétrie **axiale** qui en a une infinité (tous ceux de l'axe).
- e) **Vrai**, par la formule :

$$MM' = 2 \times OM = 2 \times 6 = 12 \text{ cm}$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) faux (un seul point) · e) vrai.