

Plaquette 4 - Centres de symétrie des figures

Symétrie centrale — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Centre de symétrie d'une figure.

- Un point O est **centre de symétrie** d'une figure si l'image de la figure par la symétrie de centre O est la figure elle-même : on la retrouve identique après un **demi-tour** autour de O .
- Méthode : on associe chaque point à son « opposé » ; le centre est le **milieu** du segment qui les joint :

$$O = \text{milieu de } [MM']$$

- Figures usuelles : **segment** (son milieu) ; **cercle** (son centre) ; **parallélogramme**, rectangle, losange, carré (point d'intersection des diagonales, qui se coupent en leur milieu) :

$$OA = OC = \frac{AC}{2} \quad OB = OD = \frac{BD}{2}$$

- Un **triangle** n'a jamais de centre de symétrie. Un polygone régulier en a un si et seulement si son nombre de côtés est **pair**.
- Une figure qui a **deux axes de symétrie perpendiculaires** a un centre de symétrie : le point d'intersection des axes.
- Avoir un axe n'entraîne pas avoir un centre (triangle équilatéral), et inversement (parallélogramme, lettre S).

Correction de l'exercice 1 - Polygones réguliers

On fait faire un demi-tour à chaque polygone autour de son centre et on regarde s'il se superpose à lui-même : chaque sommet doit tomber sur un **autre sommet**.

- a) Carré : **oui**, chaque sommet a un sommet opposé.
- b) Pentagone régulier : **non**. En face d'un sommet se trouve le **milieu d'un côté** : après un demi-tour, la pointe du haut arrive en bas, là où il n'y a pas de sommet.
- c) Hexagone régulier : **oui**. d) Octogone régulier : **oui**.
- Règle : un polygone régulier a un centre de symétrie exactement quand son nombre de côtés est pair.

$$\text{nombre de côtés pair} \Leftrightarrow \text{centre de symétrie}$$

- Tous ces polygones ont en revanche des **axes** de symétrie (autant que de côtés).

Réponse. Carré, hexagone, octogone : oui ; pentagone : non. Centre si et seulement si le nombre de côtés est pair.

Correction de l'exercice 2 - Assemblages de carreaux

On cherche un point autour duquel un demi-tour échange les carreaux deux à deux (ou laisse un carreau en place, s'il est centré sur ce point).

- a) Pièce en « Z » : **oui**. Le centre est le milieu du côté commun aux deux carreaux du milieu ; les carreaux d'extrémité s'échangent, ceux du milieu aussi.

- b) Pièce en « L » : **non**. Un demi-tour met la « jambe » du L en haut : la pièce n'est pas superposable à elle-même dans cette position.
- c) Croix : **oui**, le centre du carreau central (ce carreau est sa propre image, les quatre bras s'échangent deux à deux).
- d) Pièce en « T » : **non**, la barre du T passerait en bas.
- Contrôle pour a) : chaque carreau et son image sont à égale distance du centre, de part et d'autre :

$$OM = OM'$$

Réponse. a) oui (milieu du côté commun central) · b) non · c) oui (centre du carreau central) · d) non.

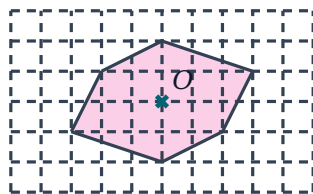
Correction de l'exercice 3 - Trouver le centre sur quadrillage

Le centre de symétrie est le milieu du segment qui joint deux points « opposés » de la figure. Pour un polygone, on associe les sommets opposés.

$$O = \text{milieu de } [MM']$$

- Le sommet le plus à gauche est opposé au sommet le plus à droite : de l'un à l'autre, 6 carreaux à droite et 2 en haut. La moitié : 3 à droite et 1 en haut.
- On place O à 3 carreaux à droite et 1 en haut du sommet de gauche.
- Contrôle avec le sommet du bas et le sommet du haut : ils sont sur la même colonne, à 4 carreaux l'un de l'autre, et O est à 2 carreaux de chacun. C'est bien le même point.
- Un seul couple suffit pour placer O , le second sert à vérifier.

Réponse. O est au milieu des sommets opposés : 3 carreaux à droite et 1 en haut du sommet de gauche.



Correction de l'exercice 4 - Mots et nombres

Un demi-tour fait deux choses : il **inverse l'ordre** des caractères (le dernier passe en premier) et il **retourne chaque caractère** tête en bas. Le mot a un centre si, après ces deux opérations, on relit le même mot.

- a) SOS : S et O ont chacun un centre ; l'ordre inversé redonne S-O-S. **Oui**.
- b) NON : N et O ont un centre ; N-O-N inversé reste N-O-N. **Oui**.
- c) ANNA : la lettre A tête en bas n'est plus un A. **Non** (ANNA a pourtant un axe vertical).
- d) XIX : X et I ont un centre, et l'ordre inversé redonne X-I-X. **Oui**.
- e) 69 : le 6 retourné devient un 9 et le 9 un 6 ; avec l'ordre inversé, on relit 69. **Oui**, sans que ni 6 ni 9 n'aient de centre :

$$69 \rightarrow 69$$

Réponse. a) oui · b) oui · c) non · d) oui · e) oui.

Correction de l'exercice 5 – Deux cercles

a) Soit O le milieu de $[IJ]$. Le symétrique de I par rapport à O est J , et les rayons sont égaux : l'image du premier cercle est le second, et inversement. **Oui**, le centre est le milieu de $[IJ]$:

$$OI = OJ = \frac{IJ}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

b) **Non**. Un centre O devrait envoyer le grand cercle sur un cercle de même rayon (2 cm) de la figure : ce ne peut être que lui-même, donc O serait son centre. De même, O serait le centre du petit cercle. Impossible, les centres sont distincts.

c) **Oui** : le centre commun. Chaque cercle est sa propre image par la symétrie de centre son centre.

Réponse. a) oui, le milieu de $[IJ]$ (à 2,5 cm de chaque centre) · b) non · c) oui, le centre commun.

Correction de l'exercice 6 – Combien de centres ?

Rappel : O est un centre de la figure si le demi-tour autour de O la laisse inchangée.

a) Segment : **un seul** centre, son milieu M , puisque A et B doivent s'échanger :

$$MA = MB = \frac{AB}{2}$$

b) Droite : **une infinité**. Une droite passant par O est sa propre image, et c'est vrai pour **tout** point O de la droite.

c) Deux sécantes : **un seul**, le point I . Chaque droite passe par I , donc elle est sa propre image. Un autre point ne convient pas : la droite qui ne le contient pas serait envoyée sur une parallèle, qui n'est pas dans la figure.

d) Deux parallèles : **une infinité**, tous les points de la droite parallèle située « au milieu », à égale distance de d_1 et d_2 : le demi-tour échange alors d_1 et d_2 .

Réponse. a) 1 (le milieu) · b) une infinité · c) 1 (le point I) · d) une infinité (la droite du milieu).

Correction de l'exercice 7 – D'autres quadrilatères

On teste chaque figure par un demi-tour, ou on cherche si ses « sommets opposés » ont un milieu commun.

a) Trapèze isocèle : **non**. Il a un axe vertical, mais un demi-tour mettrait la grande base en haut.

b) Losange : **oui**, le point d'intersection des diagonales (c'est un parallélogramme). Il a aussi deux axes perpendiculaires, les diagonales :

$$\text{deux axes perpendiculaires} \implies \text{centre à leur intersection}$$

c) Cerf-volant : **non**. Il a un seul axe (la diagonale verticale) ; ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu.

d) Hexagone allongé : **oui**, le centre de la figure : il a deux axes perpendiculaires (horizontal et vertical).

Réponse. a) non · b) oui · c) non · d) oui.

Correction de l'exercice 8 – Colorier le moins de cases possible

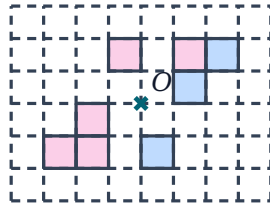
Chaque case coloriée doit avoir son image coloriée. On numérote les colonnes de gauche à droite et les lignes de bas en haut ; O est au croisement de la colonne 4/5 et de la ligne

3/4. Une case et son image sont de part et d'autre de O :

$$\text{case } (c; \ell) \rightarrow \text{case } (9 - c; 7 - \ell)$$

- Case $(2; 2) \rightarrow \text{case } (7; 5)$: **à ajouter**.
- Case $(3; 2) \rightarrow \text{case } (6; 5)$: **déjà coloriée** (les deux cases forment un couple).
- Case $(3; 3) \rightarrow \text{case } (6; 4)$: **à ajouter**.
- Case $(4; 5) \rightarrow \text{case } (5; 2)$: **à ajouter**.
- Il faut ajouter **3 cases** : la figure finale en compte 8, groupées en 4 couples.

Réponse. 3 cases : $(7; 5)$, $(6; 4)$ et $(5; 2)$ (colonne ; ligne depuis le bas).



En bleu : les 3 cases ajoutées.

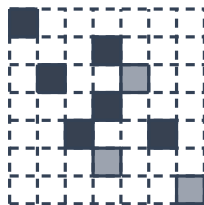
Correction de l'exercice 9 - Grille de mots croisés

On numérote les colonnes de 1 à 7 depuis la gauche, et les lignes de 1 à 7 depuis le haut. Le centre est au milieu de la case $(4; 4)$; une case et son image sont à égale distance de lui, de part et d'autre :

$$\text{case } (c; \ell) \rightarrow \text{case } (8 - c; 8 - \ell)$$

- $(1; 1) \rightarrow (7; 7)$: à noircir.
- $(2; 3) \rightarrow (6; 5)$: déjà noire. De même, $(6; 5) \rightarrow (2; 3)$.
- $(4; 2) \rightarrow (4; 6)$: à noircir.
- $(3; 5) \rightarrow (5; 3)$: à noircir.
- $(4; 4) \rightarrow (4; 4)$: la case centrale est sa **propre image**.
- Il faut noircir **3 cases** : $(7; 7)$, $(4; 6)$ et $(5; 3)$.

Réponse. 3 cases : $(7; 7)$, $(4; 6)$, $(5; 3)$ (colonne ; ligne depuis le haut).



En gris : les 3 cases à noircir.

Correction de l'exercice 10 - Axes et centre : le tableau

Figure	Nombre d'axes	Centre de symétrie ?
Carré	4	oui
Rectangle	2	oui
Losange	2	oui
Parallélogramme quelconque	0	oui
Triangle équilatéral	3	non
Trapèze isocèle	1	non
Cercle	une infinité	oui

- Chaque fois qu'une figure a **deux axes perpendiculaires**, elle a un centre, au croisement des axes (carré, rectangle, losange, cercle) :

$$\text{deux axes perpendiculaires} \implies \text{centre de symétrie}$$

- Le parallélogramme quelconque montre qu'on peut avoir un centre **sans** axe ; le triangle équilatéral et le trapèze isocèle, qu'on peut avoir des axes **sans** centre.

Réponse. 4/oui · 2/oui · 2/oui · 0/oui · 3/non · 1/non · infinité/oui.

Correction de l'exercice 11 - Étoiles

Après un demi-tour autour du centre de l'étoile, chaque pointe doit arriver sur une **autre** pointe.

- Une étoile régulière à n branches a ses pointes régulièrement réparties : deux pointes voisines sont séparées de $360^\circ \div n$. Une pointe a une pointe « en face » (à 180°) si 180° est un nombre entier d'écarts :

$$180 \div \frac{360}{n} = \frac{n}{2} \text{ doit être entier}$$

- 4 branches : $n \div 2 = 2$, **oui**. 6 branches : 3, **oui**.
- 5 branches : 2,5, **non** (en face d'une pointe se trouve un creux). 7 branches : 3,5, **non**.
- 12 branches : 6, **oui**. Même règle que pour les polygones réguliers : il faut un nombre **pair** de branches.

Réponse. 4 et 6 branches : oui ; 5 et 7 : non ; 12 branches : oui (nombre pair).

Correction de l'exercice 12 - Calculer avec le centre d'un parallélogramme

Le centre de symétrie O d'un parallélogramme est le milieu de ses deux diagonales :

$$OA = OC = \frac{AC}{2} \quad OB = OD = \frac{BD}{2}$$

- $OA = OC = 10 \div 2 = 5$ cm.
- $OB = OD = 6 \div 2 = 3$ cm.
- Par la symétrie de centre O , A a pour image C et B a pour image D ; donc $[AB]$ a pour image $[CD]$. Les longueurs étant conservées :
- $CD = AB = 7$ cm.
- Piège : OA n'est pas égal à OB en général ; les deux diagonales d'un parallélogramme n'ont pas la même longueur (sauf pour un rectangle).

Réponse. $OA = OC = 5$ cm, $OB = OD = 3$ cm, $CD = 7$ cm.

Correction de l'exercice 13 - Le vase au centre de la table

- a) Le centre de symétrie d'un rectangle est le point d'intersection de ses **diagonales**. On tend une ficelle d'un coin au coin opposé, puis une seconde entre les deux autres coins : le vase se pose à leur croisement.
- b) Le centre est à égale distance des deux grands côtés, et à égale distance des deux petits côtés (la symétrie échange les côtés opposés) :

$$\text{distance aux grands côtés} = \frac{0,9}{2} = 0,45 \text{ m}$$

$$\text{distance aux petits côtés} = \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ m}$$

Réponse. a) au croisement des diagonales · b) 0,45 m des grands côtés, 0,8 m des petits.

Correction de l'exercice 14 - Compléter un parallélogramme

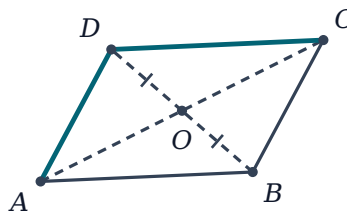
Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu O , qui est le centre de symétrie. $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales de $ABCD$.

- **1.** On trace $[AC]$ et on place son milieu O (mesure, ou médiatrice au compas). Sur la figure, O est déjà placé.
- **2.** D est l'image de B par la symétrie de centre O , car O doit aussi être le milieu de $[BD]$:

$$O \text{ milieu de } [BD] \quad \text{donc} \quad OD = OB$$

- **3.** On trace la demi-droite $[BO]$ et on reporte OB au-delà de O : c'est D .
- Contrôle : $(AD) \parallel (BC)$ et $AD = BC$, ce que l'on vérifie à la règle et à l'équerre.

Réponse. D est le symétrique de B par rapport au milieu O de $[AC]$.



Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

- a) **Faux.** Contre-exemples : le parallélogramme quelconque et la lettre S ont un centre mais aucun axe.
- b) **Faux.** 9 est impair : en face d'un sommet se trouve le milieu d'un côté.
- c) **Vrai.** Son milieu M , puisque les extrémités s'échangent :
- $$MA = MB$$
- d) **Vrai.** Leur point d'intersection : chaque droite passe par ce point, elle est donc sa propre image.
- e) **Vrai.** Le point d'intersection des deux axes est un centre de symétrie (exemples : rectangle, losange, carré, cercle, lettre H).
- Pour réfuter une affirmation générale, **un seul contre-exemple** suffit.

Réponse. a) faux · b) faux · c) vrai · d) vrai · e) vrai.