

Plaquette 3 – Construire à la règle et au compas

Symétrie centrale – Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Construire le symétrique d'un point M par rapport à O .

- 1. Tracer la demi-droite $[MO)$ à la règle.
- 2. Pointe du compas en O , écartement OM : tracer un arc qui coupe $[MO)$ au-delà de O .
- 3. Le point d'intersection est M' :

$$M, O, M' \text{ alignés et } OM' = OM$$

- La distance entre un point et son image est le double de la distance au centre :

$$MM' = 2 \times OM$$

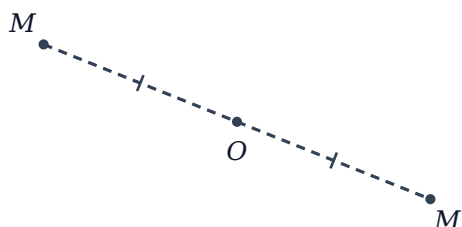
- **Segment** : image des deux extrémités. **Droite** : image de deux de ses points, ou d'un point et on trace la **parallèle** (l'image d'une droite lui est parallèle). **Cercle** : image du centre, **même rayon**. **Polygone** : image de chaque sommet.
- Longueurs, angles, aires et parallélisme sont conservés : ils servent à **contrôler** la construction.

Correction de l'exercice 1 – Les étapes de la construction

On veut que O soit le **milieu** de $[MM']$: il faut donc à la fois l'alignement et l'égalité des distances.

- **Règle** : on trace la demi-droite $[MO)$, qui part de M , passe par O et se prolonge au-delà. Cela garantit l'alignement de M , O et M' .
 - **Compas** : pointe en O , écartement jusqu'à M ; on trace un arc qui coupe la demi-droite de l'autre côté de O . Cela garantit
- $$OM' = OM$$
- Le point d'intersection est M' . On code la figure : deux petits traits identiques sur $[OM]$ et $[OM']$.
 - On peut remplacer le compas par la règle graduée (mesurer OM puis reporter), mais le compas est plus précis.

Réponse. Demi-droite $[MO)$ à la règle, puis report de OM au compas au-delà de O .



Correction de l'exercice 2 – Avec des longueurs

O est le milieu de $[AA']$: le segment est fait de deux moitiés égales à OA .

$$AA' = 2 \times OA$$

- a) On reporte 2,5 cm au-delà de O sur la demi-droite $[AO)$. Puis $AA' = 2 \times 2,5 = 5$ cm.
- b) On lit la formule dans l'autre sens : $OB = BB' \div 2 = 7 \div 2 = 3,5$ cm.
- Remarque : on ne sait pas **où** est B autour de O (il peut être dans n'importe quelle direction), seulement qu'il est sur le cercle de centre O et de rayon 3,5 cm.

Réponse. a) $AA' = 5$ cm · b) $OB = 3,5$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Image d'un segment de 4 cm

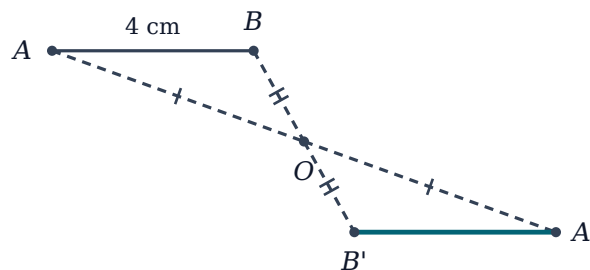
L'image d'un segment est le segment qui joint les images des extrémités. On construit donc **deux** points :

- A' : demi-droite $[AO)$, puis report de OA au compas au-delà de O .
- B' : demi-droite $[BO)$, puis report de OB au-delà de O .
- On trace $[A'B']$. Sans mesurer, les propriétés de la symétrie centrale donnent :

$$A'B' = AB = 4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad (A'B') \parallel (AB)$$

- Contrôle à la règle : $A'B'$ doit mesurer 4 cm ; sinon, l'un des reports est faux.

Réponse. $A'B' = 4$ cm et $(A'B') \parallel (AB)$.



Correction de l'exercice 4 - Image d'une droite : deux méthodes

Méthode 1 : deux points. Une droite est déterminée par deux de ses points. On construit P' et Q' , symétriques de P et Q , et on trace $d' = (P'Q')$.

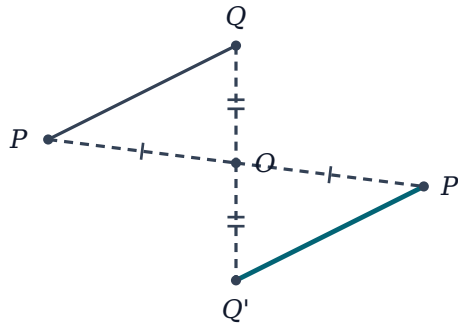
Méthode 2 : un point et le parallélisme. On sait que l'image d'une droite est une droite **parallèle** :

$$d' \parallel d$$

- On construit seulement P' , puis on trace la parallèle à d passant par P' (avec la règle et l'équerre, ou en faisant glisser l'équerre le long de la règle).

- La méthode 2 demande **un seul** symétrique, mais une construction de parallèle ; la méthode 1 est plus sûre, et la seconde image sert de contrôle.

Réponse. Image de deux points, ou image d'un point puis parallèle à d ; la 2^e ne demande qu'un symétrique.



Correction de l'exercice 5 - Une droite qui passe par le centre

- a) R' est sur la demi-droite $[RO)$, au-delà de O . Or cette demi-droite est portée par d elle-même (puisque R et O sont sur d). Donc R' est **sur** d , de l'autre côté de O , avec
- $$OR' = OR$$
- b) Tous les points de d ont leur image sur d : l'image de d est d **elle-même**. On dit que d est globalement invariante.
 - Attention : les points de d ne sont pas tous fixes, ils « échangent leur place » deux à deux (R et R'). Seul O ne bouge pas.
 - Ce cas est cohérent avec le parallélisme : d est parallèle à elle-même.

Réponse. a) sur d , de l'autre côté de O , avec $OR' = OR$ · b) d elle-même.

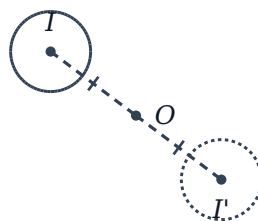
Correction de l'exercice 6 - Image d'un cercle

Un cercle est entièrement déterminé par son **centre** et son **rayon** : inutile de construire l'image de plusieurs points du cercle.

- On construit I' , symétrique de I : demi-droite $[IO)$ et report de $OI = 4$ cm au-delà de O .
- La symétrie conserve les longueurs, donc le rayon : on trace le cercle de centre I' et de rayon 1,5 cm.
- Distance entre les centres :

$$II' = 2 \times OI = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$$
- Contrôle : les deux cercles ont la même taille, et ils ne se touchent pas car $8 > 1,5 + 1,5$.

Réponse. C' : centre I' , rayon 1,5 cm ; $II' = 8$ cm.



Correction de l'exercice 7 - Un triangle aux côtés connus

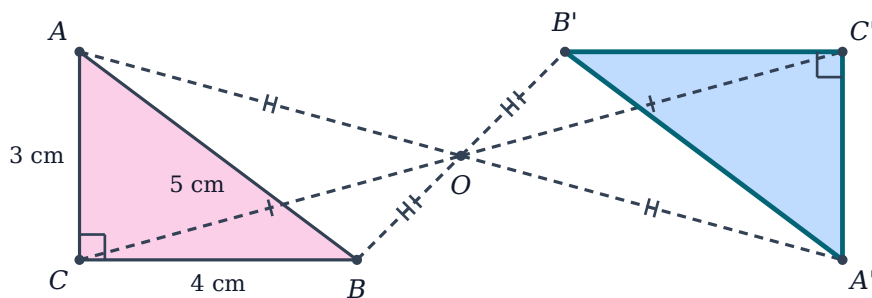
a) On construit les images des trois sommets (demi-droite passant par O , report au compas), puis on relie A' , B' , C' .

b) La symétrie centrale conserve les longueurs :

$$A'C' = AC = 3 \text{ cm} \quad B'C' = BC = 4 \text{ cm} \quad A'B' = AB = 5 \text{ cm}$$

- Périmètre : $3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$, le même que celui de ABC .
- Elle conserve aussi les angles : $A'\hat{C}'B' = A\hat{C}B = 90^\circ$. Le triangle image est rectangle en C' .
- Contrôle de la construction : on mesure $A'B'$; si on ne trouve pas 5 cm, un des sommets est mal placé.

Réponse. b) 3 cm, 4 cm, 5 cm ; périmètre 12 cm ; $A'\hat{C}'B' = 90^\circ$.



Correction de l'exercice 8 - Le centre au milieu d'un côté

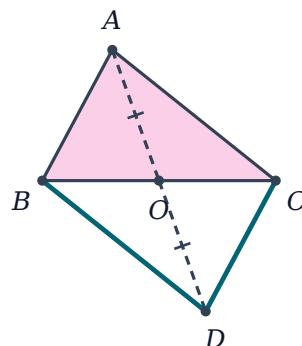
a) O est le milieu de $[BC]$: c'est exactement la définition du symétrique. Donc l'image de B est C , et l'image de C est B . Les deux sommets **échangent leur place**.

b) D est le symétrique de A , donc O est aussi le milieu de $[AD]$. Le quadrilatère $ABDC$ a pour diagonales $[AD]$ et $[BC]$, qui ont le **même milieu** O . Propriété du cours :

diagonales de même milieu $\Rightarrow$ parallélogramme

- $ABDC$ est un parallélogramme : on peut contrôler que $(BD) \parallel (AC)$ et $BD = AC$.
- Il suffit donc de construire **un seul** point, D , pour obtenir l'image du triangle : c'est le triangle DCB .

Réponse. a) $B \leftrightarrow C$ · b) $ABDC$ est un parallélogramme.



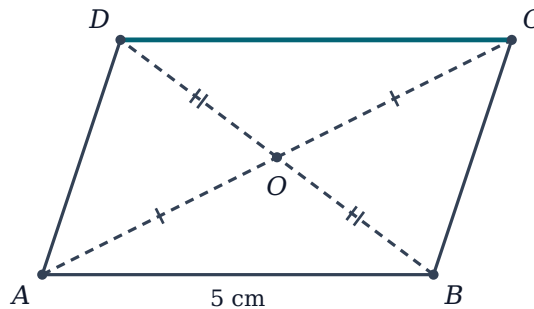
Correction de l'exercice 9 - Programme de construction

- Par construction, O est le milieu de $[AC]$ (étape 2) et le milieu de $[BD]$ (étape 3).
- $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales de $ABCD$: elles se coupent en leur milieu O .

diagonales de même milieu $\Rightarrow$ parallélogramme

- $ABCD$ est un parallélogramme de centre O .
- $[CD]$ est l'image de $[AB]$ (image de $A : C$; image de $B : D$). La symétrie conserve les longueurs : $CD = AB = 5$ cm.
- Quel que soit l'endroit où l'on a placé O , on obtient un parallélogramme : c'est une méthode de construction du parallélogramme.

Réponse. $ABCD$ est un parallélogramme ; $CD = 5$ cm.



Correction de l'exercice 10 - Rédiger le programme

Un programme de construction donne les étapes **dans l'ordre**, avec les objets à tracer et les instruments, sans rien mesurer sur le dessin fini.

- **1.** Tracer un triangle ABC et placer un point O extérieur au triangle.
- **2.** Tracer la demi-droite $[AO)$; avec le compas, reporter la longueur OA au-delà de O : on obtient A' .
- **3.** Faire de même avec B puis avec C : on obtient B' et C' .
- **4.** Tracer le triangle $A'B'C'$.
- **5.** Coder les égalités de longueurs, par exemple :

$$OA = OA' \quad OB = OB' \quad OC = OC'$$

- Chaque paire utilise un codage différent (un, deux, trois traits), comme sur la figure.

Réponse. Triangle et point O ; pour chaque sommet, demi-droite passant par O et report au compas ; relier les images ; coder.

Correction de l'exercice 11 - Repérer l'erreur

Il ne suffit pas que $ON = OM$. La définition exige que O soit le **milieu** de $[MN]$, ce qui demande **deux** conditions :

$$M, O, N \text{ alignés} \quad \text{et} \quad ON = OM$$

- Ici, la deuxième condition est vérifiée (les deux segments sont codés égaux), mais pas la première : les points M, O, N ne sont **pas alignés** (le chemin de M à N « tourne » en O).
- L'élève a donc **tort**. Tous les points à la même distance de O que M forment un cercle ; un seul d'entre eux est le symétrique : celui qui est sur la demi-droite $[MO)$.
- Correction : tracer d'abord la demi-droite $[MO)$ à la règle, **puis** reporter la longueur au compas.

Réponse. Non : $ON = OM$ mais M, O, N ne sont pas alignés.

Correction de l'exercice 12 - Image d'un angle

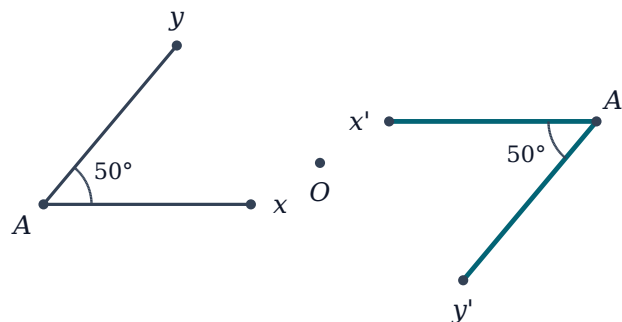
Pour construire l'image d'un angle, on construit l'image de son **sommet** et d'un point de chacun de ses côtés.

- On construit A' , puis les images des points x et y marqués sur les côtés ; on trace les demi-droites $[A'x')$ et $[A'y')$.
- La symétrie centrale conserve les mesures d'angles :

$$x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y = 50^\circ$$

- Les côtés de l'image sont **parallèles** aux côtés de départ : $(A'x') \parallel (Ax)$ et $(A'y') \parallel (Ay)$, mais **de sens contraire** ($[Ax)$ va vers la droite, $[A'x')$ vers la gauche).
- C'est un demi-tour : l'angle image « regarde » dans la direction opposée.

Réponse. $x'\hat{A}'y' = 50^\circ$; $[A'x')$ est parallèle à $[Ax)$, de sens contraire.



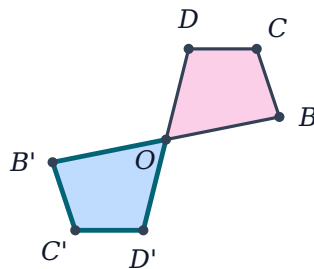
Correction de l'exercice 13 - Un sommet sur le centre

- Le sommet O est invariant : son image est O lui-même. Il reste **trois** points à construire : B' , C' et D' .
- Le quadrilatère image est $OB'C'D'$; les deux quadrilatères se touchent en O (sommet commun).
- Par construction, la figure totale contient chaque point **et** son image. Si on lui applique la symétrie, la partie rose devient la partie bleue et inversement : la figure totale se retrouve identique.

figure + son image a pour centre de symétrie O

- Oui, la figure formée a O pour centre de symétrie : c'est une façon de **fabriquer** des figures à centre de symétrie (logos, motifs).

Réponse. 3 points (O est invariant) ; oui, la figure totale a O pour centre de symétrie.



Correction de l'exercice 14 - Points alignés avec le centre

- a) M' est sur la droite (MO) et N' sur la droite (NO) ; ces deux droites sont **la même**. Les cinq points sont donc alignés : dans l'ordre N', M', O, M, N .
 b) M et N sont du même côté de O : on soustrait.

$$MN = ON - OM = 3,5 - 2 = 1,5 \text{ cm}$$

- $[M'N']$ est l'image de $[MN]$: $M'N' = MN = 1,5 \text{ cm}$ (longueur conservée).
 — M et N' sont de part et d'autre de O : on additionne. $MN' = OM + ON' = 2 + 3,5 = 5,5 \text{ cm}$, car $ON' = ON = 3,5 \text{ cm}$.

Réponse. a) oui, tous alignés · b) $MN = 1,5 \text{ cm}$, $M'N' = 1,5 \text{ cm}$, $MN' = 5,5 \text{ cm}$.



Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le rectangle dans le cercle

- a) $OA' = OA = 3 \text{ cm}$: A' est **sur le cercle**. De même pour B' . Les segments $[AA']$ et $[BB']$ passent par le centre : ce sont des **diamètres**.

$$AA' = BB' = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$$

- b) O est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$: les diagonales de $ABA'B'$ se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.
 — c) Ses diagonales sont en plus **de même longueur** (6 cm). Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un **rectangle**.
 — Conclusion : $ABA'B'$ est un rectangle, quelle que soit la position de A et B sur le cercle (tant que B n'est ni A ni A').

Réponse. a) sur le cercle, $AA' = BB' = 6 \text{ cm}$ · b) diagonales de même milieu · c) diagonales égales : rectangle.

