

Plaquette 5 - Propriétés de la symétrie centrale : calculer et justifier

Symétrie centrale — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés de la symétrie centrale (image de M notée M').

- Longueurs conservées :

$$A'B' = AB$$

- Angles conservés :

$$A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C$$

- Aires et périmètres conservés ; milieux et alignement conservés (M milieu de $[AB]$ donne M' milieu de $[A'B']$).
- L'image d'une droite lui est **parallèle** : $(A'B') \parallel (AB)$. Une perpendiculaire a pour image une perpendiculaire.
- **Angles opposés par le sommet** : deux droites sécantes en O forment des angles opposés, images l'un de l'autre par la symétrie de centre O , donc **égaux**. Deux angles adjacents dont les côtés extérieurs sont alignés sont **supplémentaires** (somme 180°).
- **Parallélogramme** $ABCD$ de centre O : O est le milieu des diagonales, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, les angles opposés sont égaux.
- Réciproque utile : un quadrilatère dont les diagonales ont le **même milieu** est un parallélogramme.
- Somme des angles d'un triangle : 180° ; d'un quadrilatère (deux triangles) : 360° .

Correction de l'exercice 1 - Périmètre de l'image

La symétrie centrale conserve les longueurs : chaque côté de l'image a la même longueur que le côté correspondant.

$$A'B' = AB \quad A'C' = AC \quad B'C' = BC$$

- $A'B' = 5$ cm, $A'C' = 6$ cm et $B'C' = 7$ cm.
- Périmètre de $A'B'C'$: $5 + 6 + 7 = 18$ cm.
- C'est aussi le périmètre de ABC : il n'était pas nécessaire de construire l'image pour le calculer.
- La position de O n'intervient pas dans ces calculs : elle ne change que l'**emplacement** de l'image.

Réponse. $A'B' = 5$ cm, $A'C' = 6$ cm, $B'C' = 7$ cm ; périmètre 18 cm.

Correction de l'exercice 2 - Angles de l'image

On calcule d'abord le troisième angle de ABC avec la somme des angles d'un triangle :

$$A\hat{C}B = 180^\circ - 40^\circ - 75^\circ = 65^\circ$$

- La symétrie centrale conserve les angles, donc :
- $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C = 40^\circ$;
- $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C = 75^\circ$;

- $A'\hat{C}B' = A\hat{C}B = 65^\circ$.
- Contrôle : $40 + 75 + 65 = 180$, la somme des angles de l'image vaut bien 180° .

Réponse. 40° , 75° et 65° .

Correction de l'exercice 3 - Un rectangle et son image

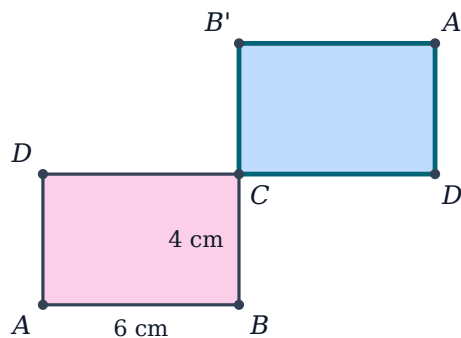
a) C est le centre : il est **invariant**. L'image du rectangle est un rectangle de mêmes dimensions (6 cm sur 4 cm), qui a C pour sommet : les angles droits et les longueurs sont conservés.

b) Aire d'un rectangle :

$$A = L \times l = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$$

- Les deux rectangles ne se chevauchent pas (ils n'ont que le point C en commun) : aire totale $24 + 24 = 48 \text{ cm}^2$.
- Périmètre d'un rectangle : $2 \times (6 + 4) = 20 \text{ cm}$. Aucun côté n'est commun, donc le contour total mesure $20 + 20 = 40 \text{ cm}$.

Réponse. a) C ; un rectangle de 6 cm sur 4 cm · b) aire 48 cm^2 , périmètre 40 cm.



Correction de l'exercice 4 - Perpendiculaires et parallèles

a) Les droites d et Δ forment un angle droit. La symétrie centrale conserve les angles, donc d' et Δ' forment aussi un angle de 90° :

$$d \perp \Delta \implies d' \perp \Delta'$$

- b) L'image d'une droite lui est parallèle : $d' \parallel d$ (et $\Delta' \parallel \Delta$).
- Pour Δ' et d : on sait que $\Delta' \parallel \Delta$ et $\Delta \perp d$. Or, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc $\Delta' \perp d$.
- Bilan : on obtient deux droites parallèles (d, d') coupées à angle droit par deux autres droites parallèles (Δ, Δ').

Réponse. a) oui, les angles sont conservés · b) $d' \parallel d$ et $\Delta' \perp d$.

Correction de l'exercice 5 - Angles opposés par le sommet

a) O est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$: A' et B' sont les symétriques de A et B par rapport à O . L'angle $A'\hat{O}B'$ est donc l'image de l'angle $A\hat{O}B$ (le sommet O est invariant). Les angles étant conservés :

$$A'\hat{O}B' = A\hat{O}B = 38^\circ$$

- Ces deux angles sont dits **opposés par le sommet** : ils sont toujours égaux.
- b) A, O, A' sont alignés : $A\hat{O}B + B\hat{O}A' = 180^\circ$ (angles supplémentaires). Donc $A'\hat{O}B = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$.

- De même, $\widehat{AOB'} = 142^\circ$ (il est opposé par le sommet à $\widehat{A'OB}$).
- Contrôle : $38 + 142 + 38 + 142 = 360$, le tour complet.

Réponse. a) image par la symétrie de centre O · b) $\widehat{AOB'} = \widehat{A'OB} = 142^\circ$.

Correction de l'exercice 6 - Les longueurs d'un parallélogramme

O est le centre de symétrie du parallélogramme : la symétrie de centre O échange A et C , ainsi que B et D .

- $[CD]$ est l'image de $[AB]$: $CD = AB = 9$ cm. $[DA]$ est l'image de $[BC]$: $AD = BC = 7$ cm.
- O est le milieu des diagonales : $OC = OA = 7$ cm et $OD = OB = 4$ cm, d'où

$$AC = 2 \times OA = 14 \text{ cm} \quad BD = 2 \times OB = 8 \text{ cm}$$

- Périmètre : $9 + 7 + 9 + 7 = 32$ cm, soit $2 \times (9 + 7)$.
- Piège : $OA = 7$ cm et $BC = 7$ cm sont égaux ici par hasard ; ce ne sont pas des longueurs « correspondantes ».

Réponse. $CD = 9$, $AD = 7$, $OC = 7$, $OD = 4$, $AC = 14$, $BD = 8$ (cm) ; périmètre 32 cm.

Correction de l'exercice 7 - Les angles d'un parallélogramme

a) Par la symétrie de centre O : $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, $C \rightarrow A$. L'angle $\widehat{ABC}$ a donc pour image $\widehat{CDA}$, et les angles sont conservés :

$$\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 110^\circ$$

- b) De même, $D \rightarrow B$: l'angle $\widehat{DAB}$ a pour image $\widehat{BCD}$, donc $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$.
- La diagonale $[AC]$ partage $ABCD$ en deux triangles : la somme des angles du quadrilatère vaut $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.
- Donc $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 360^\circ - 110^\circ - 110^\circ = 140^\circ$, et comme ils sont égaux :
 $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 140^\circ \div 2 = 70^\circ$.
- À retenir : dans un parallélogramme, les angles **opposés** sont égaux.

Réponse. a) image de $\widehat{ABC}$ par la symétrie de centre O · b) $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 70^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Le milieu est conservé

a) La symétrie centrale conserve les milieux : M' est le **milieu** de $[A'B']$. En effet, les longueurs sont conservées :

$$A'M' = AM \quad \text{et} \quad M'B' = MB$$

- Comme $AM = MB$, on obtient $A'M' = M'B'$; et A' , M' , B' sont alignés (alignement conservé).
- b) $A'B' = AB = 8$ cm. Puis $A'M' = 8 \div 2 = 4$ cm.
- O est le milieu de $[MM']$: $MM' = 2 \times OM = 2 \times 3 = 6$ cm.
- Remarque : MM' ne dépend pas de la longueur AB , seulement de la distance entre M et le centre.

Réponse. a) le milieu de $[A'B']$ · b) $A'B' = 8$ cm, $A'M' = 4$ cm, $MM' = 6$ cm.

Correction de l'exercice 9 - L'alignement est conservé

a) La symétrie centrale conserve l'alignement : A' , B' , C' sont **alignés**. Comme B est entre A et C , on a $AB + BC = AC$; les longueurs étant conservées :

$$A'B' + B'C' = A'C'$$

- donc B' est entre A' et C' : l'ordre est A' , B' , C' .

- b) $AC = AB + BC = 3 + 5 = 8$ cm, donc $A'C' = AC = 8$ cm.
- $(A'C')$ est l'image de la droite (AC) : elle lui est parallèle (ou confondue avec elle, si le centre est sur (AC)).

Réponse. a) oui, dans l'ordre A', B', C' · b) $A'C' = 8$ cm ; image d'une droite, donc parallèle.

Correction de l'exercice 10 - Démontrer qu'on a un parallélogramme

Une démonstration s'écrit en trois temps : ce que l'on sait, la propriété utilisée, la conclusion.

- **On sait que** M' est le symétrique de M par rapport à O : O est le milieu de $[MM']$. De même, O est le milieu de $[NN']$.
- $[MM']$ et $[NN']$ sont les diagonales du quadrilatère $MNM'N'$. Elles ont le même milieu O .
- **Propriété :**

diagonales de même milieu $\implies$ parallélogramme

- **Conclusion :** $MNM'N'$ est un parallélogramme.
- On en déduit que ses côtés opposés ont la même longueur : $MN = M'N'$ et $NM' = N'M$.

Réponse. Diagonales $[MM']$ et $[NN']$ de même milieu O ; donc $MN = M'N'$ et $NM' = N'M$.

Correction de l'exercice 11 - Point d'un cercle

- a) O est le milieu de $[AA']$, donc $OA' = OA = 3,5$ cm. A' est à la distance du rayon du centre : il est **sur le cercle**.
- Plus généralement, le cercle de centre O est sa propre image par la symétrie de centre O .
- b) Formule :

$$AA' = 2 \times OA = 2 \times 3,5 = 7 \text{ cm}$$

- $[AA']$ passe par le centre et joint deux points du cercle : c'est un **diamètre**. On retrouve que le diamètre vaut le double du rayon.

Réponse. a) oui · b) $AA' = 7$ cm, c'est un diamètre.

Correction de l'exercice 12 - Le papillon

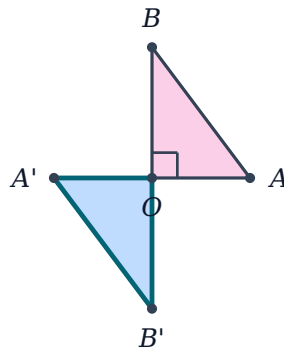
- Aire d'un triangle rectangle : demi-produit des côtés de l'angle droit.

$$A_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

- L'image a la même aire (aires conservées), et les deux triangles n'ont que le point O en commun : aire du papillon $6 + 6 = 12 \text{ cm}^2$.

- Périmètre de OAB : $3 + 4 + 5 = 12$ cm. Aucun côté n'est partagé, donc le contour du papillon mesure $12 + 12 = 24$ cm.
- $AA' = 2 \times OA = 6$ cm et $BB' = 2 \times OB = 8$ cm.

Réponse. Aire 12 cm^2 , périmètre 24 cm, $AA' = 6$ cm, $BB' = 8$ cm.



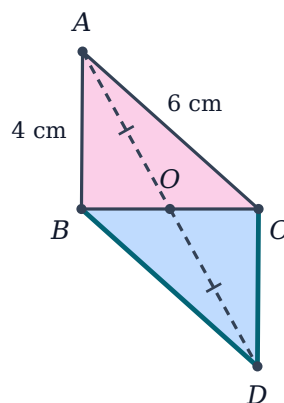
Correction de l'exercice 13 - Un motif de carrelage

- O est le milieu de $[BC]$: B et C s'échangent. L'image de A est le point D tel que O soit le milieu de $[AD]$.
- Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ du motif ont le même milieu O : $ABDC$ est un **parallélogramme**. Ses côtés : $BD = CA = 6$ cm (image de $[CA]$) et $DC = AB = 4$ cm (image de $[AB]$).

$$P = AB + BD + DC + CA = 4 + 6 + 4 + 6 = 20 \text{ cm}$$

- Attention : le côté $[BC]$ est **à l'intérieur** du motif, il ne compte pas dans le périmètre : 20 cm, et non $2 \times 14,5 = 29$ cm.
- Aire : deux triangles de même aire, soit environ $2 \times 9 = 18 \text{ cm}^2$.

Réponse. a) $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow B$ · b) parallélogramme, périmètre 20 cm, aire d'environ 18 cm^2 .



Correction de l'exercice 14 - Corriger un raisonnement

L'élève confond deux longueurs différentes :

- la distance entre un point et **son image**, qui vaut bien le double de la distance au centre :

$$AA' = 2 \times OA = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$$

- et la longueur d'un **côté** de l'image, qui est conservée : $A'B' = AB = 3$ cm.

- Correction : l'image du carré est un carré de côté **3 cm** (même taille, même aire $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$), placé de l'autre côté de O . Ce qui vaut 6 cm, c'est la distance AA' .
- Une symétrie centrale ne change jamais la taille d'une figure : c'est un demi-tour, pas un agrandissement.

Réponse. Le côté de l'image vaut 3 cm ; c'est AA' qui vaut 6 cm.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : du triangle isocèle au losange

a) O est le milieu de $[BC]$ (énoncé) et de $[AD]$ (définition du symétrique). Les diagonales de $ABDC$ ont le même milieu : c'est un **parallélogramme**.

b) La symétrie de centre O échange B et C , et envoie A sur D . Donc $DC = AB$ (image de $[AB]$) et $DB = AC$ (image de $[AC]$). Comme $AB = AC$ (triangle isocèle) :

$$AB = AC = DB = DC$$

- Un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur est un **losange**.
- c) $\widehat{BDC}$ est l'image de $\widehat{CAB}$ (car $A \rightarrow D, B \rightarrow C, C \rightarrow B$) : $\widehat{BDC} = 50^\circ$.
- Dans le triangle isocèle ABC , les angles à la base sont égaux :
 $\widehat{ABC} = (180^\circ - 50^\circ) \div 2 = 65^\circ$.

Réponse. a) diagonales de même milieu O · b) quatre côtés égaux : losange · c) $\widehat{BDC} = 50^\circ, \widehat{ABC} = 65^\circ$.

