

Plaquette 2 – Construire le symétrique sur quadrillage et dans un repère

Symétrie centrale – Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Symétrie centrale sur quadrillage et dans un repère.

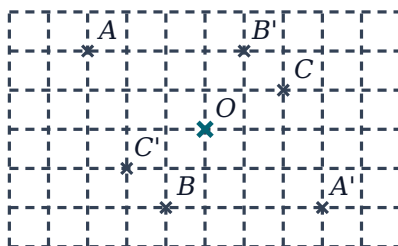
- M' est le symétrique de M par rapport à O lorsque O est le **milieu** de $[MM']$.
- **Sur quadrillage** : on compte le déplacement de M jusqu'à O (« 3 à droite, 2 en bas »), puis on refait **exactement le même déplacement** à partir de O :
déplacement de M à O = déplacement de O à M'
- Autrement dit, les décalages de M' par rapport à O sont ceux de M , **dans l'autre sens** (droite $\leftrightarrow$ gauche, haut $\leftrightarrow$ bas).
- Pour un polygone : on construit l'image de **chaque sommet**, puis on relie les images **dans le même ordre**.
- **Retrouver le centre** : c'est le milieu de $[MM']$; on fait la moitié du déplacement de M à M' .
- **Dans un repère**, par rapport à l'origine O du repère :
 $M(x; y)$ a pour symétrique $M'(-x; -y)$
- Par rapport à un autre point K : on compte le déplacement de M à K sur chaque axe, et on l'ajoute aux coordonnées de K .

Correction de l'exercice 1 - Trois points autour du centre

Pour chaque point, on compte le déplacement jusqu'à O , puis on le refait à partir de O :
déplacement de M à O = déplacement de O à M'

- $A \rightarrow O$: 3 à droite, 2 en bas. Donc A' est à 3 carreaux à droite et 2 en bas de O .
- $B \rightarrow O$: 1 à droite, 2 en haut. Donc B' est à 1 carreau à droite et 2 en haut de O .
- $C \rightarrow O$: 2 à gauche, 1 en bas. Donc C' est à 2 carreaux à gauche et 1 en bas de O .
- Contrôle : pour chaque couple, O est au milieu (même nombre de carreaux de part et d'autre, dans des sens opposés).

Réponse. A' : 3 à droite et 2 en bas de O · B' : 1 à droite et 2 en haut · C' : 2 à gauche et 1 en bas.



Correction de l'exercice 2 - Sur la ligne ou la colonne du centre

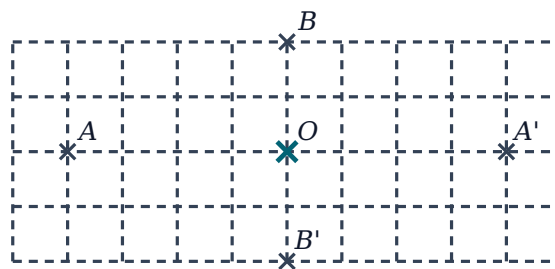
Un seul déplacement à compter ici, puisque chaque point est aligné avec O sur le quadrillage.

- A est à 4 carreaux **à gauche** de O : A' est à 4 carreaux **à droite** de O , sur la même ligne.
- B est à 2 carreaux **au-dessus** de O : B' est à 2 carreaux **en dessous** de O , sur la même colonne.
- Longueurs : O est le milieu, donc on double la distance au centre :

$$MM' = 2 \times OM$$

- $AA' = 2 \times 4 = 8$ carreaux et $BB' = 2 \times 2 = 4$ carreaux.

Réponse. A' : 4 carreaux à droite de O ; B' : 2 carreaux sous O ; $AA' = 8$ et $BB' = 4$ carreaux.



Correction de l'exercice 3 - Image d'un segment

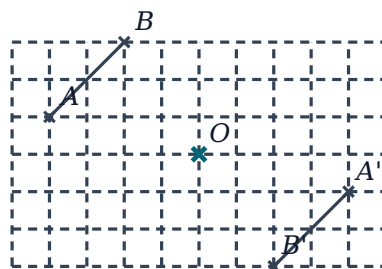
L'image d'un segment est un segment : il suffit de construire les images de ses **deux extrémités**, puis de les relier.

- $A \rightarrow O$: 4 à droite, 1 en bas. Donc A' est à 4 à droite et 1 en bas de O .
- $B \rightarrow O$: 2 à droite, 3 en bas. Donc B' est à 2 à droite et 3 en bas de O .
- On trace $[A'B']$. La symétrie centrale conserve les longueurs et transforme une droite en une droite parallèle :

$$A'B' = AB \quad \text{et} \quad (A'B') \parallel (AB)$$

- Sur le quadrillage, on le voit : pour aller de A à B , on fait 2 à droite et 2 en haut ; pour aller de A' à B' , 2 à gauche et 2 en bas. Même direction, sens opposé.

Réponse. $[A'B']$ a la même longueur que $[AB]$ et lui est parallèle.



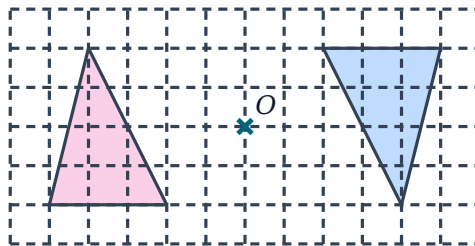
Correction de l'exercice 4 - Image d'un triangle

On construit l'image de **chaque sommet**, puis on relie les images dans le même ordre. Pour chacun :

déplacement de M à O = déplacement de O à M'

- Sommet en bas à gauche : 5 à droite et 2 en haut jusqu'à O ; son image est à 5 à droite et 2 en haut de O , près du coin en haut à droite du quadrillage.
- Sommet en bas à droite : 2 à droite et 2 en haut jusqu'à O ; son image est à 2 à droite et 2 en haut de O .
- Sommet du haut : 4 à droite et 2 en bas jusqu'à O ; son image est à 4 à droite et 2 en bas de O .
- On relie les trois images : le triangle bleu est « la tête en bas ». Son côté horizontal est maintenant **en haut**, et sa pointe **en bas**.

Réponse. Un triangle superposable, retourné d'un demi-tour (côté horizontal en haut, pointe en bas).



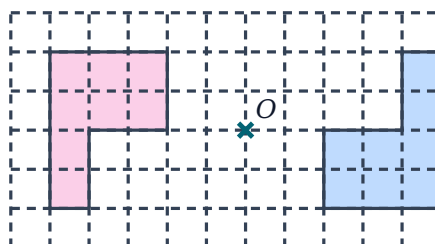
Correction de l'exercice 5 - Image d'un drapeau

Avec 6 sommets, on est méthodique : on traite les sommets un par un, dans l'ordre, et on vérifie chaque image. Pour chacun :

déplacement de M à O = déplacement de O à M'

- Pied du mât : 5 à droite, 2 en haut jusqu'à O ; image à 5 à droite et 2 en haut de O .
- Haut du mât : 5 à droite, 2 en bas ; image à 5 à droite et 2 en bas de O .
- Coins du tissu : même méthode ; le tissu, qui était **en haut à droite du mât**, se retrouve **en bas à gauche** du mât image.
- On relie les 6 images dans l'ordre. Le drapeau bleu est « tête en bas » et pointe vers la gauche : un demi-tour, pas un effet miroir.

Réponse. Le drapeau image a son mât à droite, tissu vers la gauche et vers le bas (demi-tour).



Correction de l'exercice 6 - Une figure qui entoure le centre

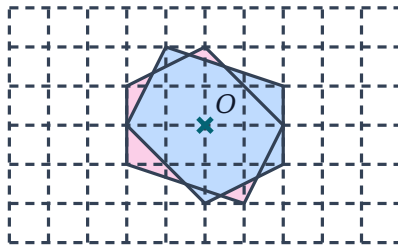
La méthode ne change pas quand O est dans la figure : on construit l'image de chaque sommet.

- Sommet 2 à gauche et 1 en bas de $O \rightarrow$ image à 2 à droite et 1 en haut de O .
- Sommet 1 à droite et 2 en bas $\rightarrow$ image à 1 à gauche et 2 en haut.
- Sommet 2 à droite, sur la ligne de $O \rightarrow$ image 2 à gauche, sur la même ligne.
- Sommet 2 en haut, sur la colonne de $O \rightarrow$ image 2 en bas, sur la même colonne.
- Sommet 2 à gauche et 1 en haut $\rightarrow$ image 2 à droite et 1 en bas.
- Le centre est son propre symétrique ($O' = O$), il appartient donc aux deux figures :

$$O \in \text{figure} \Rightarrow O \in \text{image}$$

- Les deux figures se **chevauchent** forcément autour de O .

Réponse. Oui : O est invariant, les deux figures se chevauchent autour de lui.

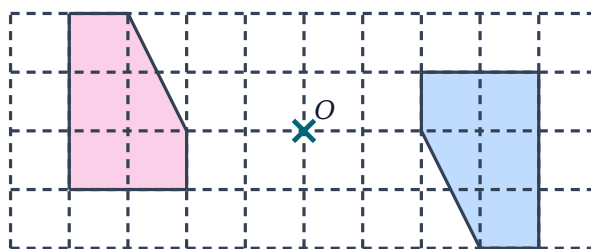


Correction de l'exercice 7 - Image ou pas ?

Il suffit d'**un** sommet dont l'image n'est pas un sommet de la figure bleue pour conclure « non ».

- La pointe rose est à 3 carreaux à gauche et 2 carreaux **en haut** de O .
- Son image doit donc être à 3 carreaux à droite et 2 carreaux **en bas** de O :
déplacement de M à O = déplacement de O à M'
- Or la pointe bleue est à 3 à droite et 2 **en haut** de O : ce n'est pas le bon point.
- L'élève a **tort**. La figure bleue est en fait l'image de la rose par la symétrie **axiale** d'axe vertical passant par O : la pointe reste en haut, c'est un effet miroir. La symétrie centrale, elle, met la pointe **en bas** (demi-tour).

Réponse. Non : c'est l'image par une symétrie axiale (axe vertical), pas par la symétrie de centre O .



La vraie image par la symétrie de centre O .

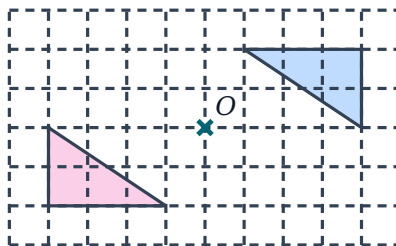
Correction de l'exercice 8 - Retrouver le centre effacé

Le centre est le **milieu** du segment qui joint un sommet à son image :

$$O = \text{milieu de } [MM']$$

- On associe d'abord les sommets : l'angle droit rose (en bas à gauche) a pour image l'angle droit bleu (en haut à droite).
- De l'un à l'autre : 8 carreaux à droite et 4 carreaux en haut. La moitié : 4 à droite et 2 en haut.
- On place O à 4 carreaux à droite et 2 en haut de l'angle droit rose.
- Vérification avec le sommet de droite du triangle rose et son image : de l'un à l'autre, 2 à droite et 4 en haut ; la moitié (1 à droite, 2 en haut) mène au **même** point O .

Réponse. O est à 4 carreaux à droite et 2 en haut de l'angle droit rose ; le 2^e sommet le confirme.



Correction de l'exercice 9 - Compléter pour obtenir un centre

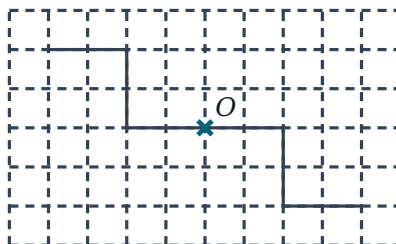
Pour que O soit centre de symétrie, la figure doit contenir l'image de **chacun** de ses points. On ajoute donc l'image de la ligne brisée.

- Le point de départ est O lui-même : il est invariant, la nouvelle partie part aussi de O .
- Coude 2 à gauche de $O \rightarrow$ image 2 à droite de O .
- Coude 2 à gauche et 2 en haut $\rightarrow$ image 2 à droite et 2 en bas.
- Extrémité 4 à gauche et 2 en haut $\rightarrow$ image 4 à droite et 2 en bas.
- Chaque segment ajouté est parallèle et de même longueur que son antécédent :

$$A'B' = AB \quad \text{et} \quad (A'B') \parallel (AB)$$

- On obtient un « escalier » qui se superpose à lui-même après un demi-tour autour de O .

Réponse. On ajoute l'image de la ligne : départ en O , puis 2 à droite, 2 en bas, 2 à droite.



Correction de l'exercice 10 - Dans un repère, par rapport à l'origine

Par rapport à l'origine, le déplacement de M jusqu'à O est l'opposé de ses coordonnées ; on le refait à partir de O . D'où la règle :

$$M(x; y) \text{ a pour symétrique } M'(-x; -y)$$

- $A(3; 2) \rightarrow A'(-3; -2)$.
- $B(-4; 1) \rightarrow B'(4; -1)$: l'opposé de -4 est 4 .
- $C(0; -5) \rightarrow C'(0; 5)$: l'opposé de 0 est 0 , C' reste sur l'axe des ordonnées.
- $D(-2,5; -3) \rightarrow D'(2,5; 3)$.
- Piège : ne changer le signe que d'une coordonnée donne le symétrique par rapport à un **axe**, pas par rapport à O .

Réponse. $A'(-3; -2) \cdot B'(4; -1) \cdot C'(0; 5) \cdot D'(2,5; 3)$.

Correction de l'exercice 11 - Remonter au point de départ

La règle du cours fonctionne dans les deux sens :

$$M(x; y) \leftrightarrow M'(-x; -y)$$

- a) Si E' est le symétrique de E , alors E est aussi le symétrique de E' (le demi-tour inverse est encore un demi-tour). On change les deux signes : $E(6; -4)$.
- b) Un point est son propre symétrique si $x = -x$ et $y = -y$, c'est-à-dire $x = 0$ et $y = 0$: c'est l'origine $O(0; 0)$, seul point invariant.
- c) $F'(0; -7)$: son abscisse est nulle, F' est sur l'**axe des ordonnées**, 7 unités sous l'origine.

Réponse. a) $E(6; -4)$ · b) l'origine $O(0; 0)$ · c) $F'(0; -7)$, sur l'axe des ordonnées.

Correction de l'exercice 12 - Centre qui n'est pas l'origine

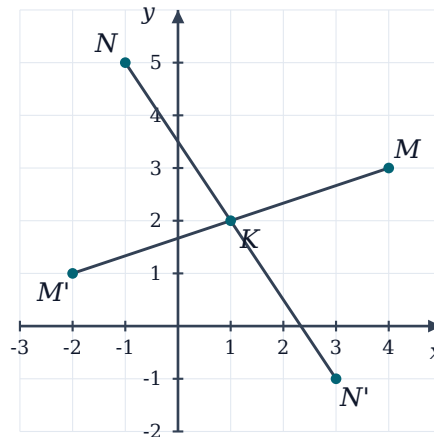
La règle « changer les signes » ne vaut que pour l'origine. Ici, on revient à la méthode du quadrillage, axe par axe :

$$\text{déplacement de } M \text{ à } K = \text{déplacement de } K \text{ à } M'$$

- De $M(4; 3)$ à $K(1; 2)$: x diminue de 3, y diminue de 1. On refait ce déplacement à partir de K : $M'(1 - 3; 2 - 1)$, soit $M'(-2; 1)$.
- De $N(-1; 5)$ à $K(1; 2)$: x augmente de 2, y diminue de 3. Donc $N'(1 + 2; 2 - 3)$, soit $N'(3; -1)$.

- Contrôle : K est bien au milieu, par exemple entre $M(4; 3)$ et $M'(-2; 1)$, les abscisses 4 et -2 sont à 3 unités de part et d'autre de 1.

Réponse. $M'(-2; 1)$ et $N'(3; -1)$.



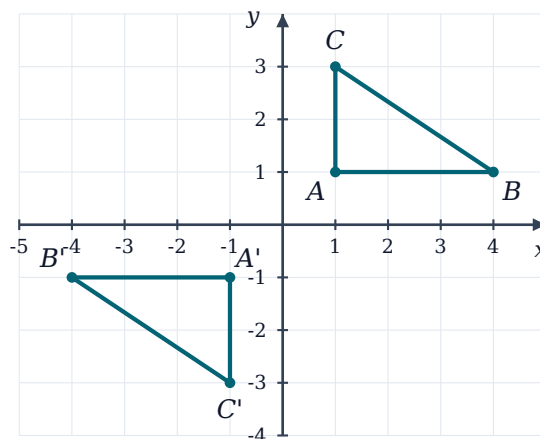
Correction de l'exercice 13 - Un triangle rectangle dans le repère

- a) On change les deux signes : $A'(-1; -1)$, $B'(-4; -1)$, $C'(-1; -3)$.
- b) A' et B' ont la même ordonnée : $A'B' = 4 - 1 = 3$ cm. A' et C' ont la même abscisse : $A'C' = 3 - 1 = 2$ cm.
- On retrouve $AB = 3$ cm et $AC = 2$ cm : les longueurs sont conservées. L'angle droit en A l'est aussi, donc $A'B'C'$ est rectangle en A' .
- Aire d'un triangle rectangle :

$$A = \frac{\text{côté} \times \text{côté}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

- C'est aussi l'aire de ABC : la symétrie centrale conserve les aires.

Réponse. a) $A'(-1; -1)$, $B'(-4; -1)$, $C'(-1; -3)$ · b) $A'B' = 3$ cm, $A'C' = 2$ cm, aire 3 cm^2 .



Correction de l'exercice 14 - Trouver le centre par le calcul

- a) K est le milieu de $[AA']$: on part de A et on fait **la moitié** du déplacement de A à A' .
 $K = \text{milieu de } [AA']$
- De $A(-3; 5)$ à $A'(5; -1)$: x augmente de 8, y diminue de 6.
- La moitié : x augmente de 4, y diminue de 3. Donc $K(-3 + 4; 5 - 3)$, soit $K(1; 2)$.

- Contrôle : de $K(1; 2)$ à $A'(5; -1)$, x augmente de 4 et y diminue de 3 : même déplacement, K est bien au milieu.
- b) De $B(0; 4)$ à $K(1; 2)$: x augmente de 1, y diminue de 2. On refait ce déplacement depuis K : $B'(2; 0)$.

Réponse. a) $K(1; 2)$ · b) $B'(2; 0)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un parallélogramme dans le repère

- a) On change les deux signes : $C(2; -1)$ et $D(-1; -3)$.
- b) Par construction, O est le milieu de $[AC]$ et le milieu de $[BD]$. Les diagonales de $ABCD$ se coupent donc en leur milieu. Propriété du cours :
diagonales de même milieu $\Rightarrow$ parallélogramme
- $ABCD$ est un parallélogramme de centre O .
- c) De A à B : x augmente de 3, y augmente de 2. De $D(-1; -3)$ à $C(2; -1)$: x augmente de 3, y augmente de 2. Même déplacement : les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, de même longueur et de même sens.

Réponse. a) $C(2; -1)$, $D(-1; -3)$ · b) diagonales de même milieu O · c) même déplacement « 3 à droite, 2 en haut ».

