

Plaquette 5 - Propriétés de la symétrie centrale : calculer et justifier

Symétrie centrale — Cinquième

Exercices

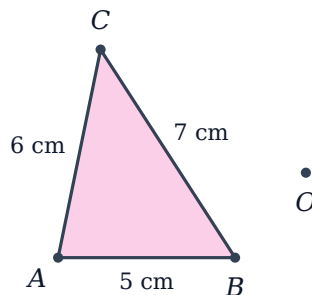
Méthode

La symétrie centrale **conserve** les longueurs, les angles, les aires, les milieux et l'alignement, et transforme une droite en une droite **parallèle**. On utilise ces propriétés pour **calculer sans mesurer** (périmètres, angles, aires) et pour **justifier** : angles opposés par le sommet, propriétés du parallélogramme, nature d'un quadrilatère. Chaque réponse cite la propriété employée.

Exercice 1 - Périmètre de l'image

Le triangle ABC a pour côtés $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 7$ cm. On construit son image $A'B'C'$ par la symétrie de centre O .

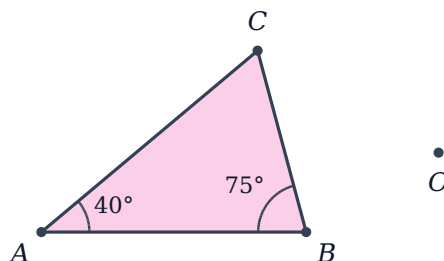
Donner les longueurs des côtés de $A'B'C'$ et son périmètre, sans mesurer.



Exercice 2 - Angles de l'image

Dans le triangle ABC , $\widehat{BAC} = 40^\circ$ et $\widehat{ABC} = 75^\circ$. On construit son image $A'B'C'$ par la symétrie de centre O .

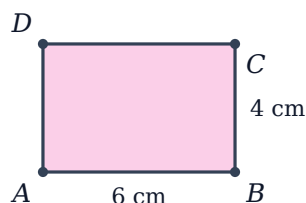
Calculer les trois angles du triangle $A'B'C'$.



Exercice 3 - Un rectangle et son image

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm. On construit son image par la symétrie de centre C (un de ses sommets).

- Quelle est l'image de C ? Quelle est la nature de l'image du rectangle ?
- Calculer l'aire et le périmètre de la figure formée par le rectangle et son image.

**Exercice 4 - Perpendiculaires et parallèles**

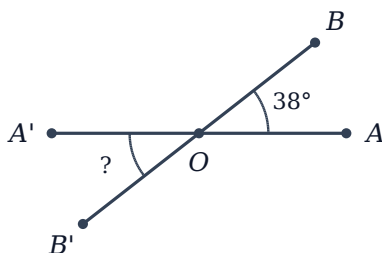
Les droites d et Δ sont perpendiculaires. Leurs images par une symétrie centrale sont d' et Δ' .

- Les droites d' et Δ' sont-elles perpendiculaires ? Justifier.
- Quelle est la position de d' par rapport à d ? Et de Δ' par rapport à d ?

Exercice 5 - Angles opposés par le sommet

Les droites (AA') et (BB') se coupent en O , avec $OA = OA'$ et $OB = OB'$. L'angle $\widehat{AOB}$ mesure 38° .

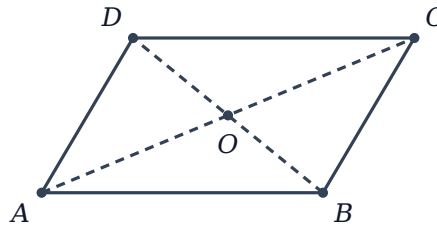
- Justifier que $\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}$.
- Calculer $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.



Exercice 6 - Les longueurs d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O , avec $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm, $OA = 7$ cm et $OB = 4$ cm.

Calculer CD , AD , OC , OD , AC , BD et le périmètre de $ABCD$.

**Exercice 7 - Les angles d'un parallélogramme**

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O et $\widehat{ABC} = 110^\circ$.

- Justifier que $\widehat{CDA} = 110^\circ$.
- Justifier que $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$, puis calculer ces deux angles.

Exercice 8 - Le milieu est conservé

M est le milieu du segment $[AB]$, qui mesure 8 cm. On construit A' , B' , M' , images de A , B , M par une symétrie centrale.

- Que représente M' pour $[A'B']$?
- Calculer $A'B'$, $A'M'$ et MM' sachant que le centre O est à 3 cm de M .

Exercice 9 - L'alignement est conservé

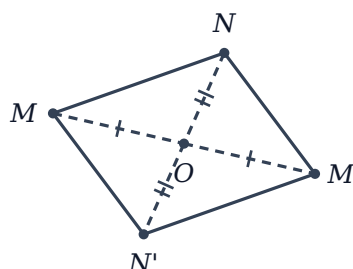
Les points A , B , C sont alignés dans cet ordre, avec $AB = 3$ cm et $BC = 5$ cm. On construit leurs images A' , B' , C' par une symétrie centrale.

- Les points A' , B' , C' sont-ils alignés ? Dans quel ordre ?
- Calculer $A'C'$ et justifier que $(A'C') \parallel (AC)$.

Exercice 10 - Démontrer qu'on a un parallélogramme

M et N sont deux points, et O un point qui n'est pas sur la droite (MN) . On construit M' et N' , symétriques de M et N par rapport à O .

Démontrer que $MNM'N'$ est un parallélogramme, puis en déduire deux égalités de longueurs.



Exercice 11 - Point d'un cercle

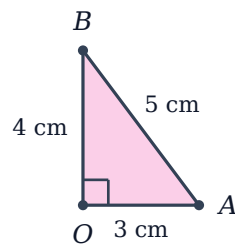
Le cercle C a pour centre O et pour rayon 3,5 cm. Le point A est sur C , et A' est son symétrique par rapport à O .

- A' est-il sur le cercle ?
- Calculer AA' . Comment appelle-t-on le segment $[AA']$?

Exercice 12 - Le papillon

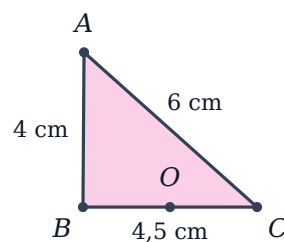
Le triangle OAB est rectangle en O , avec $OA = 3$ cm, $OB = 4$ cm et $AB = 5$ cm. On lui ajoute son image par la symétrie de centre O pour former un « papillon ».

Calculer l'aire et le périmètre du papillon, ainsi que les longueurs AA' et BB' .

**Exercice 13 - Un motif de carrelage**

Un carreleur découpe un triangle ABC avec $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 4,5$ cm ; son aire est d'environ 9 cm^2 . Il pose à côté l'image du triangle par la symétrie de centre O , milieu de $[BC]$, et obtient un motif $ABDC$.

- Quelle est l'image de A ? De B ? De C ?
- Quelle est la nature du motif ? Calculer son périmètre et son aire.

**Exercice 14 - Corriger un raisonnement**

Un élève écrit : « Le carré $ABCD$ a pour côté 3 cm. Son symétrique par rapport à un point O situé à 3 cm de A est un carré de côté 6 cm, car on double les distances. »

Trouver l'erreur et corriger.

Exercice 15 - Synthèse : du triangle isocèle au losange

ABC est un triangle isocèle en A avec $\widehat{BAC} = 50^\circ$. O est le milieu de $[BC]$ et D est le symétrique de A par rapport à O .

- Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.
- Montrer que ses quatre côtés ont la même longueur. Quelle est la nature de $ABDC$?
- Calculer $\widehat{BDC}$, puis $\widehat{ABC}$.

