Plaquette 1 – Angles, droites remarquables et quadrilatères usuels

Triangles et quadrilatères — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés du cours.

— **Somme des angles** d'un triangle :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

— **Médiatrices** : elles se coupent au centre du **cercle circonscrit** ; dans un triangle rectangle, c'est le milieu de l'hypoténuse. **Aire** d'un triangle $= \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

— **Triangle isocèle** en A : $AB = AC$, et les angles à la base sont égaux ($\hat{B} = \hat{C}$).

— **Triangle équilatéral** : trois côtés égaux et trois angles de 60°.

— **Triangle rectangle** : un angle de 90° ; les deux angles aigus sont **complémentaires** (leur somme vaut 90°).

— **Parallélogramme** : côtés opposés parallèles et de même longueur ; angles opposés égaux ; diagonales se coupant en leur milieu ; centre de symétrie.

— **Rectangle** : parallélogramme à quatre angles droits ; diagonales de même longueur.

— **Losange** : parallélogramme à quatre côtés égaux ; diagonales perpendiculaires.

— **Carré** : à la fois rectangle et losange ; diagonales égales, perpendiculaires et se coupant en leur milieu.

— La somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° (deux triangles) :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

Correction de l'exercice 1 – Somme des angles

Propriété du cours : la somme des angles d'un triangle vaut 180°.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

a) $\hat{C} = 180 - 62 - 48 = 70°$.

b) $\hat{B} = 180 - 90 - 27 = 63°$. (On pouvait aussi utiliser la complémentarité : $90 - 27 = 63°$.)

c) $\hat{C} = 180 - 90 - 45 = 45°$. Deux angles égaux, donc le triangle est **isocèle**, et il est rectangle : c'est un triangle **rectangle isocèle**.

Réponse. a) 70° · b) 63° · c) 45°, triangle rectangle isocèle.

Correction de l'exercice 2 – Triangle isocèle

Dans un triangle isocèle en A, les angles à la base sont égaux :

$$\hat{B} = \hat{C}$$

a) $36 + 2\hat{B} = 180$, donc $2\hat{B} = 144$ et $\hat{B} = \hat{C} = 72°$.

b) Ici $\hat{B} = 70°$, donc $\hat{C} = 70°$ aussi.

— $\hat{A} = 180 - 70 - 70 = 40°$.

— Contrôle : $40 + 70 + 70 = 180°$. Correct.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 72° chacun · b) $\hat{A} = 40°$.

Correction de l’exercice 3 – Le pignon d’une maison

Le triangle est isocèle en C : ses angles à la base sont égaux, $\hat{A} = \hat{B} = 35°$. On utilise ensuite la somme des angles :

$$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$$

— $\hat{C} = 180 - 35 - 35 = 110°$.
— Les deux pans forment un angle de 110° au faîte : c’est un angle **obtus**, ce qui correspond à un toit peu pentu.
— Contrôle : $35 + 35 + 110 = 180°$.

Réponse. 110°.

Correction de l’exercice 4 – L’échelle contre le mur

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont **complémentaires** : leur somme vaut 90° (car l’angle droit prend déjà 90° sur les 180°).

$$\hat{P} + \hat{M} = 90°$$

— $\hat{M} = 90 - 70 = 20°$.
— Autre méthode, avec la somme des angles : $180 - 90 - 70 = 20°$.
— L’échelle fait un angle de 20° avec le mur : plus elle est proche du mur, plus cet angle est petit.

Réponse. 20°.

Correction de l’exercice 5 – Le cercle circonscrit

a) Dans un triangle rectangle, les médiatrices se coupent au **milieu de l’hypoténuse** : O est le milieu de $[BC]$, le côté opposé à l’angle droit.

b) Le rayon est la distance de O aux sommets :

$$OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Comme O est le centre du cercle qui passe par A, B et C, on a aussi $OA = 5$ cm : le sommet de l’angle droit est sur le cercle de diamètre $[BC]$.

Réponse. a) Le milieu de $[BC]$ · b) 5 cm ; $OA = 5$ cm.

Correction de l’exercice 6 – Hauteur, médiane et aire

a) La base $[AB]$ et la hauteur issue de C lui sont perpendiculaires :

$$A_{ABC} = \frac{AB \times h}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

b) Les triangles AIC et IBC ont des bases égales ($AI = IB = 4$ cm) et la **même hauteur** (5 cm) :

— $A_{AIC} = \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$ cm² et $A_{IBC} = 10$ cm².

La médiane $[CI]$ partage le triangle en deux triangles de même aire.

Réponse. a) 20 cm² · b) 10 cm² chacun.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Triangle équilatéral

— a) Les trois angles sont égaux et leur somme vaut 180°, donc chacun mesure $\frac{180}{3} = 60°$.
— b) **Oui** : le troisième angle vaut $180 - 60 - 60 = 60°$, donc les trois angles sont égaux.
— Un triangle dont les trois angles sont égaux a ses trois côtés égaux : il est bien équilatéral.
— Conséquence pratique : il suffit de **deux** angles de 60° pour conclure.

Réponse. a) 60° chacun · b) oui.

Correction de l’exercice 8 – Reconnaître un quadrilatère

On utilise les caractérisations par les diagonales.

— a) Même milieu + même longueur ($AC = BD$) : c’est un **rectangle** (non carré).
— b) Même milieu + perpendiculaires ($(AC) \perp (BD)$) : c’est un **losange** (non carré).
— c) Les trois propriétés : c’est un **carré**.
— d) Même milieu seulement : c’est un **parallélogramme** quelconque.
— Ce tableau de propriétés est l’outil le plus efficace pour démontrer la nature d’un quadrilatère.

Réponse. a) rectangle · b) losange · c) carré · d) parallélogramme.

Correction de l’exercice 9 – Angles d’un parallélogramme

— a) Dans un parallélogramme, les **angles opposés sont égaux**, donc $\hat{C} = \hat{A} = 115°$.
— b) La somme des angles d’un quadrilatère vaut 360°, donc $\hat{B} + \hat{D} = 360 - 115 - 115 = 130°$.
— Or $\hat{B} = \hat{D}$ (angles opposés), donc chacun vaut $\frac{130}{2} = 65°$.
— Contrôle : $115 + 65 = 180°$: deux angles consécutifs d’un parallélogramme sont bien **supplémentaires**.

Réponse. a) 115° · b) 65° chacun.

Correction de l’exercice 10 – Démontrer qu’un quadrilatère est un parallélogramme

— $OA = OC$ signifie que O est le **milieu** de $[AC]$.
— $OB = OD$ signifie que O est le milieu de $[BD]$.
— Les deux diagonales se coupent donc en leur milieu. Propriété du cours :

$$\text{diagonales de même milieu} \Longrightarrow \text{parallélogramme}$$

— $ABCD$ est un **parallélogramme**.
— Est-ce un rectangle ? Il faudrait $AC = BD$, or $AC = 8$ cm et $BD = 11$ cm : ce n’est **pas** un rectangle.
— Rien n’indique que les diagonales sont perpendiculaires : on ne peut pas conclure qu’il s’agit d’un losange.

Réponse. Un parallélogramme (mais ni rectangle ni carré, car $AC \neq BD$).

Correction de l’exercice 11 – Somme des angles d’un quadrilatère

Propriété du cours : la somme des angles d’un quadrilatère vaut 360°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

— Somme des trois angles connus : $85 + 100 + 70 = 255°$.
— Quatrième angle : $360 - 255 = 105°$.
— Contrôle : $85 + 100 + 70 + 105 = 360°$. Correct.
— Remarque : on peut retrouver cette propriété en découpant le quadrilatère en **deux triangles** par une diagonale : $2 \times 180 = 360°$.

Réponse. 105°.

Correction de l'exercice 12 – Losange et diagonales

a) Les diagonales d'un losange se coupent en leur **milieu** :

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm} \qquad OB = \frac{BD}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$$

— b) Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** : $A\hat{O}B = 90°$.
— c) Le triangle AOB est donc **rectangle en** O, avec des côtés de 6 cm et 8 cm.
— Remarque : on pourra en déduire (en quatrième, avec Pythagore) que le côté du losange vaut 10 cm.

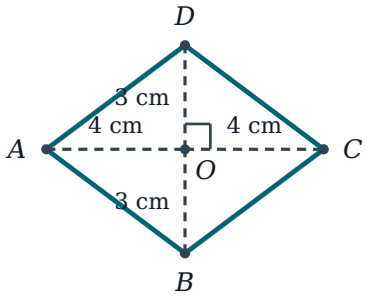
Réponse. a) $OA = 6$ cm, $OB = 8$ cm · b) 90° · c) rectangle en O.

Correction de l'exercice 13 – Problème : programme de construction

On identifie les propriétés des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

— O est le milieu de $[AC]$ (par construction) et le milieu de $[BD]$ (car $OB = OD$) : les diagonales se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.
— Les diagonales sont **perpendiculaires** (par construction) : c'est donc un **losange**.
— Sont-elles de même longueur ? $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm : non. Ce n'est **pas** un carré.
— Conclusion : $ABCD$ est un losange non carré.

Réponse. Un losange (non carré, car $AC = 8 \neq BD = 6$).



Correction de l'exercice 14 – Un triangle équilatéral sur un carré

a) L'angle $D\hat{A}E$ est formé de l'angle du carré et de l'angle du triangle équilatéral :

$$D\hat{A}E = D\hat{A}B + B\hat{A}E = 90° + 60° = 150°$$

b) $AD = AB$ (côtés du carré) et $AE = AB$ (côtés du triangle équilatéral), donc $AD = AE$: le triangle ADE est **isocèle en** A.

c) Ses angles à la base sont égaux : $A\hat{D}E = A\hat{E}D$. Avec la somme des angles : $2 \times A\hat{D}E = 180 - 150 = 30$, donc $A\hat{D}E = A\hat{E}D = 15°$.

Réponse. a) 150° · b) $AD = AE$ · c) 15° chacun.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : vrai ou faux

a) **Faux.** Deux angles droits feraient déjà 180°, il ne resterait rien pour le troisième.

b) **Vrai.** Les trois hauteurs d’un triangle sont **concourantes** (comme les trois médiatrices).

c) **Vrai.** Un rectangle a ses côtés opposés parallèles : c’est un parallélogramme particulier (avec quatre angles droits).

d) **Faux.** Un parallélogramme quelconque n’a pas d’angle droit. L’implication ne fonctionne que dans un sens.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).