

Plaquette 3 - Angles et parallélisme

Triangles et quadrilatères — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Angles et parallélisme.

- Deux angles **complémentaires** ont pour somme 90° ; **supplémentaires**, 180° .
Deux angles adjacents dont les côtés extérieurs sont alignés sont supplémentaires.
- Deux angles **opposés par le sommet** sont égaux.
- Deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une sécante (δ) forment :
 - des angles **alternes-internes** : entre les deux droites, de part et d'autre de la sécante ;
 - des angles **correspondants** : du même côté de la sécante, l'un entre les droites et l'autre à l'extérieur, « à la même place » à chaque intersection.
- **Propriété** : si les droites sont parallèles, les angles alternes-internes (et les angles correspondants) sont égaux.

$$(d_1) \parallel (d_2) \implies \text{alternes-internes égaux}$$

- **Réciproque** : si deux angles alternes-internes (ou correspondants) sont égaux, les droites sont parallèles.

$$\text{alternes-internes égaux} \implies (d_1) \parallel (d_2)$$

Correction de l'exercice 1 - Quatre angles autour d'un point

- a) L'angle 3 est **opposé par le sommet** à l'angle 1 (même sommet, côtés dans le prolongement l'un de l'autre). Il lui est égal : angle 3 = 55° .
b) Les angles 1 et 2 sont adjacents et leurs côtés extérieurs sont alignés (portés par la même droite) : ils sont **supplémentaires**.

$$\text{angle 1} + \text{angle 2} = 180^\circ$$

- Angle 2 = $180 - 55 = 125^\circ$, et l'angle 4, opposé par le sommet à l'angle 2, vaut aussi 125° .
- Contrôle : $55 + 125 + 55 + 125 = 360^\circ$, un tour complet.

Réponse. a) l'angle 3 · b) angle 2 = 125° , angle 3 = 55° , angle 4 = 125° .

Correction de l'exercice 2 - Complémentaires et supplémentaires

Définitions :

$$\text{complémentaires : } a + b = 90^\circ \quad \text{supplémentaires : } a + b = 180^\circ$$

- a) Complémentaire : $90 - 35 = 55^\circ$. Supplémentaire : $180 - 35 = 145^\circ$.
- b) **Non** : $118^\circ > 90^\circ$, il faudrait un angle négatif. Seul un angle aigu a un complémentaire. Son supplémentaire existe : $180 - 118 = 62^\circ$.
- c) Si le petit angle vaut x , le grand vaut $3x$ et $x + 3x = 180$, soit $4x = 180$ et $x = 45^\circ$.
Les angles mesurent 45° et 135° .
- Contrôle : $135 = 3 \times 45$ et $45 + 135 = 180$.

Réponse. a) 55° et 145° · b) non · c) 45° et 135° .

Correction de l'exercice 3 - Angles opposés par le sommet

Deux propriétés suffisent : les angles opposés par le sommet sont égaux, et deux angles adjacents formant un angle plat sont supplémentaires.

$$\text{angle adjacent} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

- L'angle en bas à gauche est opposé par le sommet à l'angle de 72° : il mesure 72° .
- L'angle en haut à gauche est adjacent à celui de 72° , avec des côtés extérieurs alignés : il mesure 108° .
- Le dernier (en bas à droite) est opposé par le sommet à celui de 108° : 108° .
- Deux droites sécantes forment donc toujours deux paires d'angles égaux, les deux mesures étant supplémentaires.

Réponse. 72° , 108° , 108° .

Correction de l'exercice 4 - Reconnaître les paires d'angles

On repère pour chaque angle sa position : **entre** les droites ou à l'extérieur, et de quel **côté** de la sécante.

- a) a (en E , au-dessus de (d_1) , à droite de (δ)) et b (en F , sous (d_2) , à gauche de (δ)) : tous deux **entre** les droites, de part et d'autre de la sécante. Ils sont **alternes-internes**.
- b) a et c sont du même côté de la sécante (à droite), chacun au-dessus de sa droite : même position aux deux intersections. Ils sont **correspondants**.
- c) b et d ont le même sommet F et un côté commun, et leurs côtés extérieurs sont alignés sur (d_2) : ils sont **adjacents supplémentaires**.

$$b + d = 180^\circ$$

Réponse. a) alternes-internes · b) correspondants · c) adjacents supplémentaires.

Correction de l'exercice 5 - Parallèles : trouver les angles

Les droites étant parallèles, on peut utiliser la propriété directe :

$$(d_1) \parallel (d_2) \implies \text{alternes-internes égaux et correspondants égaux}$$

- b et l'angle de 65° sont **alternes-internes** : $b = 65^\circ$.
- c et l'angle de 65° sont **correspondants** : $c = 65^\circ$.
- d est adjacent à c , avec des côtés extérieurs alignés sur (d_2) : $d = 180 - 65 = 115^\circ$.
- Contrôle : b et c sont aussi opposés par le sommet, il est normal qu'ils soient égaux.

Réponse. $b = 65^\circ$, $c = 65^\circ$, $d = 115^\circ$.

Correction de l'exercice 6 - Les huit angles

- a) En E : l'angle de 48° , son opposé par le sommet (48°) et deux angles supplémentaires :

$$180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$$

- En F , chaque angle est le **correspondant** d'un angle de E ; les droites étant parallèles, les correspondants sont égaux : on retrouve 48° , 48° , 132° , 132° .
- Bilan : **quatre** angles de 48° et **quatre** angles de 132° .
- b) En chaque point, on n'a que deux mesures (opposés égaux, adjacents supplémentaires) ; et le parallélisme « recopie » les angles de E en F . Cela ne marche que parce que les droites sont parallèles.

Réponse. a) quatre angles de 48° et quatre de 132° .

Correction de l'exercice 7 - Parallèles ou pas ?

On raisonne par l'absurde avec la propriété directe :

$$(d_1) \parallel (d_2) \implies \text{alternes-internes égaux}$$

- Si les droites étaient parallèles, les deux angles alternes-internes seraient égaux.
- Or $62^\circ \neq 58^\circ$.
- Donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont **pas parallèles** : elles finissent par se couper (du côté gauche de la figure, où elles se rapprochent).
- À l'œil, 4° d'écart ne se voit presque pas : c'est le calcul qui tranche, pas l'impression visuelle.

Réponse. Non, car $62^\circ \neq 58^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Démontrer un parallélisme

Une démonstration se rédige en trois étapes : données, propriété, conclusion.

- **On sait que** les angles a et b , formés par (d_1) , (d_2) et la sécante (δ) , sont alternes-internes et égaux (73°).
- **Propriété** (réciproque) :

$$\text{alternes-internes égaux} \implies \text{droites parallèles}$$

- **Donc** $(d_1) \parallel (d_2)$.
- Attention à ne pas confondre avec la propriété directe : ici, on **part** des angles pour **conclure** au parallélisme.

Réponse. $(d_1) \parallel (d_2)$ (angles alternes-internes égaux).

Correction de l'exercice 9 - Avec des angles correspondants

- Les deux angles sont du même côté de la sécante (à gauche) et occupent la même position à chaque intersection (au-dessus de leur droite) : ils sont **correspondants**.
- La réciproque vaut aussi pour les angles correspondants :

$$\text{correspondants égaux} \implies \text{droites parallèles}$$

- Les deux angles mesurent 110° : donc $(d_1) \parallel (d_2)$.
- Remarque : on pouvait aussi se ramener aux alternes-internes. L'angle en bas à droite de F est opposé par le sommet à celui de 110° , et il est alterne-interne avec l'angle de 110° en E .

Réponse. a) correspondants · b) $(d_1) \parallel (d_2)$.

Correction de l'exercice 10 - Les rails du tramway

Les rails sont parallèles : les angles correspondants sont égaux.

$$(d_1) \parallel (d_2) \implies \text{correspondants égaux}$$

- En F , l'angle en haut à droite est correspondant à l'angle de 35° en E : il mesure 35° .
- Les autres angles en F : son opposé par le sommet (35°) et deux angles supplémentaires, $180 - 35 = 145^\circ$.
- La rue coupe donc les deux rails avec les mêmes angles, 35° et 145° . Un angle aussi aigu est dangereux pour un vélo : la roue peut se coincer dans la gorge du rail.

Réponse. 35° (et 145° pour les angles adjacents).

Correction de l'exercice 11 - Pourquoi la somme vaut 180°

a) Les droites (XY) et (AB) sont parallèles. Avec la sécante (AC) , les angles a' et a sont **alternes-internes** : ils sont égaux, $a' = a$. De même, avec la sécante (BC) , b' et b sont alternes-internes : $b' = b$.

b) En C , les trois angles a' , c et b' sont côte à côte et forment l'angle plat $X\hat{C}Y$ (les points X , C , Y sont alignés) :

$$a' + c + b' = 180^\circ$$

- En remplaçant a' par a et b' par b : $a + b + c = 180^\circ$.
- C'est la **démonstration** de la propriété de la somme des angles, valable pour tous les triangles.

Réponse. a) alternes-internes (droites parallèles) · b) $a + c + b = 180^\circ$ (angle plat).

Correction de l'exercice 12 - L'angle en chevron

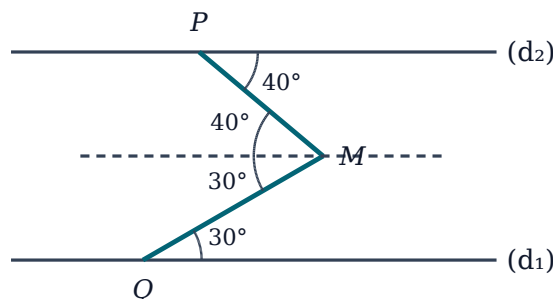
On trace la droite (Δ) parallèle à (d_1) passant par M ; elle est aussi parallèle à (d_2) . Elle partage l'angle $P\hat{M}Q$ en deux.

- Partie haute : avec la sécante (PM) et les parallèles (d_2) et (Δ) , l'angle en M et l'angle de 40° en P sont **alternes-internes** : 40° .
- Partie basse : avec la sécante (QM) et les parallèles (d_1) et (Δ) , on obtient de même 30° .
- Donc :

$$P\hat{M}Q = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$$

- L'angle en chevron est la **somme** des deux angles formés avec les parallèles.

Réponse. $P\hat{M}Q = 70^\circ$.



Correction de l'exercice 13 - Angles d'un trapèze

On prolonge $[AD]$ au-delà de D . Avec les parallèles (AB) et (DC) et la sécante (AD) , l'angle extérieur en D (entre le prolongement et $[DC]$) est **correspondant** à $\hat{A}$: il mesure 60° .

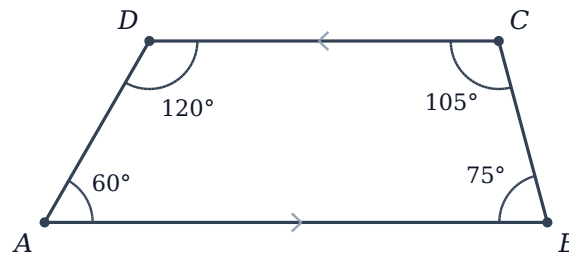
- Cet angle extérieur et $\hat{D}$ forment un angle plat :

$$\hat{D} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

- Même raisonnement avec la sécante (BC) : $\hat{C} = 180 - 75 = 105^\circ$.
- Contrôle avec la somme des angles du quadrilatère : $60 + 75 + 105 + 120 = 360^\circ$.

- Dans un trapèze, deux angles qui « s'appuient » sur un même côté oblique sont supplémentaires.

Réponse. $\hat{D} = 120^\circ$ et $\hat{C} = 105^\circ$.



Correction de l'exercice 14 - Angles consécutifs du parallélogramme

- a) Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles : $(DC) \parallel (AB)$. La droite (AE) est une sécante. Les angles $x = \hat{CDE}$ et $\hat{DAB}$ sont du même côté de la sécante et à la même position : ils sont **correspondants**, donc égaux.

$$x = \hat{DAB} = 70^\circ$$

- b) Les points A, D, E sont alignés : $\hat{ADC}$ et x sont supplémentaires.
 $\hat{ADC} = 180 - 70 = 110^\circ$.
 — On retrouve que deux angles **consécutifs** d'un parallélogramme sont supplémentaires ($70 + 110 = 180$).

Réponse. a) $x = 70^\circ$ (correspondants) · b) $\hat{ADC} = 110^\circ$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

- a) **Vrai**, sans condition : ce sont les angles formés par deux droites sécantes, symétriques par rapport à leur sommet.
 b) **Faux** : ils ne sont égaux que si les deux droites sont **parallèles** (exercice des angles de 62° et 58°).
 c) **Vrai**, par la réciproque :

$$\text{correspondants égaux} \implies \text{droites parallèles}$$

- d) **Faux** : deux angles obtus dépassent chacun 90° , leur somme dépasse 180° . Des angles supplémentaires sont deux angles droits, ou un aigu et un obtus.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) faux.