

Plaquette 1 - Angles, inégalité triangulaire et quadrilatères usuels

Triangles et quadrilatères — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés du cours.

- **Somme des angles** d'un triangle :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

- **Inégalité triangulaire** : un triangle est constructible si la plus grande longueur est **inférieure** à la somme des deux autres. S'il y a égalité, les points sont alignés (triangle « aplati »).
- **Triangle isocèle** en A : $AB = AC$, et les angles à la base sont égaux ($\hat{B} = \hat{C}$).
- **Triangle équilatéral** : trois côtés égaux et trois angles de 60° .
- **Triangle rectangle** : un angle de 90° ; les deux angles aigus sont **complémentaires** (leur somme vaut 90°).
- **Parallélogramme** : côtés opposés parallèles et de même longueur ; angles opposés égaux ; diagonales se coupant en leur milieu ; centre de symétrie.
- **Rectangle** : parallélogramme à quatre angles droits ; diagonales de même longueur.
- **Losange** : parallélogramme à quatre côtés égaux ; diagonales perpendiculaires.
- **Carré** : à la fois rectangle et losange ; diagonales égales, perpendiculaires et se coupant en leur milieu.
- La somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° (deux triangles) :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

Correction de l'exercice 1 - Somme des angles

Propriété du cours : la somme des angles d'un triangle vaut 180° .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

- $\hat{C} = 180 - 62 - 48 = 70^\circ$.
- $\hat{B} = 180 - 90 - 27 = 63^\circ$. (On pouvait aussi utiliser la complémentarité : $90 - 27 = 63^\circ$.)
- $\hat{C} = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$. Deux angles égaux, donc le triangle est **isocèle**, et il est rectangle : c'est un triangle **rectangle isocèle**.

Réponse. a) 70° · b) 63° · c) 45° , triangle rectangle isocèle.

Correction de l'exercice 2 - Triangle isocèle

Dans un triangle isocèle en A, les angles à la base sont égaux :

$$\hat{B} = \hat{C}$$

- $36 + 2\hat{B} = 180$, donc $2\hat{B} = 144$ et $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$.
- Ici $\hat{B} = 70^\circ$, donc $\hat{C} = 70^\circ$ aussi.
 - $\hat{A} = 180 - 70 - 70 = 40^\circ$.
 - Contrôle : $40 + 70 + 70 = 180^\circ$. Correct.

Réponse. a) 72° chacun · b) $\hat{A} = 40^\circ$.

Correction de l'exercice 3 - Le pignon d'une maison

Le triangle est isocèle en C : ses angles à la base sont égaux, $\hat{A} = \hat{B} = 35^\circ$. On utilise ensuite la somme des angles :

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

- $\hat{C} = 180 - 35 - 35 = 110^\circ$.
- Les deux pans forment un angle de 110° au faîte : c'est un angle **obtus**, ce qui correspond à un toit peu pentu.
- Contrôle : $35 + 35 + 110 = 180^\circ$.

Réponse. 110° .

Correction de l'exercice 4 - L'échelle contre le mur

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont **complémentaires** : leur somme vaut 90° (car l'angle droit prend déjà 90° sur les 180°).

$$\hat{P} + \hat{M} = 90^\circ$$

- $\hat{M} = 90 - 70 = 20^\circ$.
- Autre méthode, avec la somme des angles : $180 - 90 - 70 = 20^\circ$.
- L'échelle fait un angle de 20° avec le mur : plus elle est proche du mur, plus cet angle est petit.

Réponse. 20° .

Correction de l'exercice 5 - Inégalité triangulaire

Critère du cours : on compare la **plus grande** longueur à la somme des deux autres.

$$\text{plus grand côté} < \text{somme des deux autres}$$

- a) $3 + 4 = 7 > 6$: le triangle est **constructible**.
- b) $2 + 3 = 5 < 7$: le triangle n'est **pas** constructible (les deux petits côtés sont trop courts pour se rejoindre).
- c) $5 + 5 = 10$, soit exactement la troisième longueur : les trois points sont **alignés**, le triangle est « aplati », donc non constructible au sens strict.

Réponse. a) oui · b) non · c) non (cas d'égalité, points alignés).

Correction de l'exercice 6 - Encadrer un côté

On applique l'inégalité triangulaire dans les deux sens.

- x doit être inférieur à la somme des deux autres : $x < 7 + 4 = 11$.
- 7 ne doit pas être trop grand devant les autres : $7 < 4 + x$, donc $x > 3$.
- Conclusion, en centimètres :

$$7 - 4 < x < 7 + 4 \quad \text{soit} \quad 3 < x < 11$$

- Contrôle : avec $x = 5$, on a $7 < 4 + 5 = 9$: constructible. Avec $x = 2$, on aurait $7 > 4 + 2 = 6$: impossible.

Réponse. $3 \text{ cm} < x < 11 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 7 - Triangle équilatéral

- a) Les trois angles sont égaux et leur somme vaut 180° , donc chacun mesure $\frac{180}{3} = 60^\circ$.
- b) **Oui** : le troisième angle vaut $180 - 60 - 60 = 60^\circ$, donc les trois angles sont égaux.
- Un triangle dont les trois angles sont égaux a ses trois côtés égaux : il est bien équilatéral.
- Conséquence pratique : il suffit de **deux** angles de 60° pour conclure.

Réponse. a) 60° chacun · b) oui.

Correction de l'exercice 8 - Reconnaître un quadrilatère

On utilise les caractérisations par les diagonales.

- a) Même milieu + même longueur ($AC = BD$) : c'est un **rectangle** (non carré).
- b) Même milieu + perpendiculaires ($(AC) \perp (BD)$) : c'est un **losange** (non carré).
- c) Les trois propriétés : c'est un **carré**.
- d) Même milieu seulement : c'est un **parallélogramme** quelconque.
- Ce tableau de propriétés est l'outil le plus efficace pour démontrer la nature d'un quadrilatère.

Réponse. a) rectangle · b) losange · c) carré · d) parallélogramme.

Correction de l'exercice 9 - Angles d'un parallélogramme

- a) Dans un parallélogramme, les **angles opposés sont égaux**, donc $\hat{C} = \hat{A} = 115^\circ$.
- b) La somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° , donc $\hat{B} + \hat{D} = 360 - 115 - 115 = 130^\circ$.
- Or $\hat{B} = \hat{D}$ (angles opposés), donc chacun vaut $\frac{130}{2} = 65^\circ$.
- Contrôle : $115 + 65 = 180^\circ$: deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont bien **supplémentaires**.

Réponse. a) 115° · b) 65° chacun.

Correction de l'exercice 10 - Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

- $OA = OC$ signifie que O est le **milieu** de $[AC]$.
- $OB = OD$ signifie que O est le milieu de $[BD]$.
- Les deux diagonales se coupent donc en leur milieu. Propriété du cours :
diagonales de même milieu $\implies$ parallélogramme
- $ABCD$ est un **parallélogramme**.
- Est-ce un rectangle ? Il faudrait $AC = BD$, or $AC = 8$ cm et $BD = 11$ cm : ce n'est **pas** un rectangle.
- Rien n'indique que les diagonales sont perpendiculaires : on ne peut pas conclure qu'il s'agit d'un losange.

Réponse. Un parallélogramme (mais ni rectangle ni carré, car $AC \neq BD$).

Correction de l'exercice 11 - Somme des angles d'un quadrilatère

Propriété du cours : la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

- Somme des trois angles connus : $85 + 100 + 70 = 255^\circ$.
- Quatrième angle : $360 - 255 = 105^\circ$.
- Contrôle : $85 + 100 + 70 + 105 = 360^\circ$. Correct.
- Remarque : on peut retrouver cette propriété en découpant le quadrilatère en **deux triangles** par une diagonale : $2 \times 180 = 360^\circ$.

Réponse. 105° .

Correction de l'exercice 12 - Losange et diagonales

a) Les diagonales d'un losange se coupent en leur **milieu** :

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm} \quad OB = \frac{BD}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$$

- b) Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** : $\hat{AOB} = 90^\circ$.
- c) Le triangle AOB est donc **rectangle en O**, avec des côtés de 6 cm et 8 cm.
- Remarque : on pourra en déduire (en quatrième, avec Pythagore) que le côté du losange vaut 10 cm.

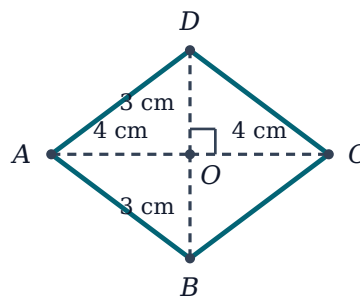
Réponse. a) $OA = 6 \text{ cm}$, $OB = 8 \text{ cm}$ · b) 90° · c) rectangle en O.

Correction de l'exercice 13 - Problème : programme de construction

On identifie les propriétés des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

- O est le milieu de $[AC]$ (par construction) et le milieu de $[BD]$ (car $OB = OD$) : les diagonales se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.
- Les diagonales sont **perpendiculaires** (par construction) : c'est donc un **losange**.
- Sont-elles de même longueur ? $AC = 8 \text{ cm}$ et $BD = 6 \text{ cm}$: non. Ce n'est **pas** un carré.
- Conclusion : $ABCD$ est un losange non carré.

Réponse. Un losange (non carré, car $AC = 8 \neq BD = 6$).



Correction de l'exercice 14 - Un triangle équilatéral sur un carré

a) L'angle $\hat{DAE}$ est formé de l'angle du carré et de l'angle du triangle équilatéral :

$$\hat{DAE} = \hat{DAB} + \hat{BAE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

b) $AD = AB$ (côtés du carré) et $AE = AB$ (côtés du triangle équilatéral), donc $AD = AE$: le triangle ADE est **isocèle en A**.

c) Ses angles à la base sont égaux : $\hat{ADE} = \hat{AED}$. Avec la somme des angles : $2 \times \hat{ADE} = 180 - 150 = 30$, donc $\hat{ADE} = \hat{AED} = 15^\circ$.

Réponse. a) 150° · b) $AD = AE$ · c) 15° chacun.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : vrai ou faux

- a) **Faux.** Deux angles droits feraient déjà 180° , il ne resterait rien pour le troisième.
- b) **Faux.** $4 + 5 = 9$: c'est le cas d'**égalité**, les points sont alignés, le triangle est aplati.
- c) **Vrai.** Un rectangle a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme particulier (avec quatre angles droits).
- d) **Faux.** Un parallélogramme quelconque n'a pas d'angle droit. L'implication ne fonctionne que dans un sens.

Réponse. a) faux · b) faux · c) vrai · d) faux.