Plaquette 2 – Construire un triangle

Triangles et quadrilatères — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Construire un triangle.

— **Trois longueurs** : on trace le plus grand côté, puis les deux arcs. Ils ne se coupent (et le triangle n'existe) que si les deux autres longueurs, mises bout à bout, dépassent le plus grand côté :

$$BC < AB + AC$$

— Si elles sont juste égales, les trois points sont alignés (triangle « aplati ») : $AC = AB + BC$ signifie que B est sur le segment $[AC]$.

— **Trois longueurs** : tracer le plus grand côté, puis deux arcs de cercle centrés en ses extrémités ; ils se coupent au troisième sommet.

— **Deux longueurs et l'angle compris** : tracer un côté, placer l'angle au rapporteur, reporter la seconde longueur.

— **Une longueur et deux angles** : tracer le côté, placer les deux angles à ses extrémités ; les demi-droites se coupent au troisième sommet. Possible seulement si la somme des deux angles est inférieure à 180° :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

— Les **médiatrices** des trois côtés se coupent en un point O, centre du **cercle circonscrit** : $OA = OB = OC$.

Correction de l'exercice 1 – Trois longueurs au compas

On vérifie d'abord que les arcs pourront se couper : les deux petits côtés mis bout à bout doivent dépasser le plus grand.

$$AB < AC + BC \quad \text{soit} \quad 6 < 4 + 5 = 9$$

— C'est vrai : le triangle est constructible.

— **1.** Tracer le segment $[AB]$ de 6 cm (le plus grand côté, à la règle).

— **2.** Compas pointé en A, écartement 4 cm : tracer un arc au-dessus de $[AB]$.

— **3.** Compas pointé en B, écartement 5 cm : tracer un arc qui coupe le premier.

— **4.** Le point d'intersection est C ; tracer $[AC]$ et $[BC]$, puis coder les longueurs.

— Les arcs se coupent aussi en un point sous $[AB]$: il donne un second triangle, symétrique du premier, qui convient aussi.

Réponse. Constructible ($6 < 9$) : $[AB]$ puis arcs de 4 cm (centre A) et 5 cm (centre B).

Correction de l'exercice 2 – Constructible ou non ?

Pour chaque triplet, on compare la **plus grande** longueur à la somme des deux autres :

$$\text{plus grand côté} < \text{somme des deux autres}$$

— a) $5 + 6 = 11 < 12$: **non**, les deux petits côtés sont trop courts.

— b) $4 + 4 = 8 > 7$: **oui** (triangle isocèle).

— c) Le plus grand est 9 (l'ordre de l'énoncé ne compte pas) : $3 + 6 = 9$, égalité. **Non** : triangle aplati, points alignés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— d) $2{,}5 + 4{,}5 = 7 > 6$: **oui**.
— Piège du c) : comparer 9 avec $3 + 6$, et non 6 avec $3 + 9$.

Réponse. a) non · b) oui · c) non (aplati) · d) oui.

Correction de l’exercice 3 – Le cas d’égalité

On calcule la somme des deux plus petites longueurs :

$$AB + BC = 3 + 5 = 8 = AC$$

— La somme est **égale** à la troisième longueur. Pour aller de A à C, passer par B ne rallonge pas le trajet : B est donc sur le segment $[AC]$.
— Les trois points A, B, C sont **alignés**, dans cet ordre. On obtient un triangle « aplati », qui n’est pas un vrai triangle.
— À retenir : le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. Si B n’est pas sur $[AC]$, alors $AB + BC > AC$.

Réponse. B est sur $[AC]$; triangle aplati, donc pas de vrai triangle.



Correction de l’exercice 4 – Deux côtés et l’angle compris

L’angle donné est **compris** entre les deux côtés connus (son sommet A est leur extrémité commune) : la construction se fait à partir de A.

— **1.** Tracer $[AB]$ de 5 cm.
— **2.** Rapporteur centré en A, zéro sur $[AB]$: marquer 50° et tracer la demi-droite.
— **3.** Sur cette demi-droite, reporter 4 cm à partir de A : c’est C.
— **4.** Tracer $[BC]$ et mesurer : on trouve environ 3,9 cm.
— Contrôle au rapporteur : les deux autres angles mesurent environ 52° et 78°, et la somme des angles vaut bien

$$50° + 52° + 78° = 180°$$

Réponse. $BC \approx 3{,}9$ cm.

Correction de l’exercice 5 – Un côté et deux angles

Les deux angles sont **adjacents** au côté $[AB]$: on les place à ses deux extrémités.

— **1.** Tracer $[AB]$ de 6 cm.
— **2.** En A, tracer au rapporteur une demi-droite faisant 40° avec $[AB]$.
— **3.** En B, du même côté, tracer une demi-droite faisant 60° avec $[BA]$.
— **4.** Les deux demi-droites se coupent en C.
— Troisième angle, par la somme des angles :

$$\widehat{ACB} = 180° - 40° - 60° = 80°$$

— Contrôle au rapporteur sur la figure : on doit lire 80°.

Réponse. $\widehat{ACB} = 80°$.

Correction de l’exercice 6 – Un triangle isocèle

Le triangle est isocèle en R : les deux côtés issus de R sont égaux, donc $RT = RS = 4$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les arcs de 4 cm tracés depuis S et T se coupent, car $4 + 4$ dépasse ST :

$$ST < RS + RT \quad \text{soit} \quad 5 < 4 + 4 = 8$$

— La construction est possible.

— **1.** Tracer $[ST]$ de 5 cm. **2.** Deux arcs de rayon 4 cm, centrés en S et en T. **3.** Leur intersection est R.

— Coder les deux côtés égaux par le même petit trait.

Réponse. $RT = 4$ cm ; possible car $5 < 8$.

Correction de l'exercice 7 – Un triangle rectangle

C'est un cas « deux côtés et l'angle compris », avec un angle de 90° : on remplace le rapporteur par l'**équerre**.

— **1.** Tracer $[EF]$ de 4 cm.

— **2.** Avec l'équerre, tracer la perpendiculaire à (EF) passant par E.

— **3.** Reporter 3 cm sur cette perpendiculaire : c'est G. Tracer $[FG]$ et coder l'angle droit.

— **4.** On mesure $FG = 5$ cm.

— Les deux angles aigus sont complémentaires :

$$\hat{F} + \hat{G} = 90°$$

— On mesure $\hat{F} \approx 37°$ et $\hat{G} \approx 53°$, et $37 + 53 = 90$.

Réponse. Règle et équerre ; $FG = 5$ cm.

Correction de l'exercice 8 – Un triangle équilatéral

Trois côtés égaux : c'est le cas « trois longueurs », avec un seul écartement de compas.

— **1.** Tracer $[MN]$ de 5 cm.

— **2.** Sans changer l'écartement (5 cm), tracer un arc centré en M, puis un arc centré en N.

— **3.** Leur intersection est P.

— Les trois angles sont égaux et leur somme vaut 180° :

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \frac{180°}{3} = 60°$$

— C'est la seule façon de tracer un angle de 60° **sans rapporteur**.

Réponse. Arcs de 5 cm centrés en M et N ; angles de 60°.

Correction de l'exercice 9 – Des angles impossibles

Tout triangle vérifie :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

a) $100 + 85 = 185 > 180$: il ne reste rien pour $\hat{C}$. **Impossible** : les deux demi-droites tracées en A et B ne se rencontrent pas.

b) $30 + 40 = 70$, donc $\hat{C} = 180 - 70 = 110°$. **Possible** (triangle obtus en C).

c) $50 + 50 + 50 = 150 \neq 180$: **impossible**. Les trois angles d'un triangle ne sont pas indépendants : deux suffisent à connaître le troisième.

Réponse. a) non ($185° > 180°$) · b) oui, $\hat{C} = 110°$ · c) non ($150° \neq 180°$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Un seul triangle ou plusieurs ?

— a) **Non.** Les angles sont compatibles ($50 + 60 + 70 = 180$), mais aucune longueur n’est donnée : chacun choisit la longueur du premier côté. On obtient des triangles de même **forme** mais de tailles différentes (des agrandissements les uns des autres).
— b) **Oui.** Avec trois longueurs (qui vérifient $6 < 4 + 5$), la construction au compas donne toujours le même triangle, à la position près : on peut superposer les triangles de toute la classe.
— Les trois cas qui donnent un triangle unique :

3 côtés 2 côtés + angle compris 1 côté + 2 angles adjacents

Réponse. a) non, la taille varie · b) oui, trois longueurs déterminent le triangle.

Correction de l’exercice 11 – Périmètre imposé

Si la base mesure b, les deux côtés égaux se partagent le reste du périmètre :

$$\text{côté} = \frac{20 - b}{2}$$

a) $\frac{20 - 8}{2} = 6$ cm. Test : $8 < 6 + 6 = 12$, **constructible**.
b) $\frac{20 - 12}{2} = 4$ cm. Test : $12 > 4 + 4 = 8$, **impossible**.
c) Il faut $b <$ côté + côté $= 20 - b$, donc $2b < 20$, soit $b < 10$ cm. Avec $b = 10$, les côtés feraient 5 cm et le triangle serait aplati ($10 = 5 + 5$).

Réponse. a) 6 cm, possible · b) 4 cm, impossible · c) la base doit rester inférieure à 10 cm.

Correction de l’exercice 12 – Rédiger le programme

Les données codées sont deux côtés, $AB = 7$ cm et $AC = 5$ cm, et l’angle $B\hat{A}C = 35°$ qu’ils encadrent : c’est le cas « deux côtés et l’angle compris ».

— **1.** Tracer un segment $[AB]$ de longueur 7 cm.
— **2.** Tracer la demi-droite d’origine A qui forme avec $[AB]$ un angle de $35°$:

$$B\hat{A}C = 35°$$

— **3.** Placer sur cette demi-droite le point C tel que $AC = 5$ cm.
— **4.** Tracer le segment $[BC]$.
— Un programme ne contient **que** des données nécessaires : inutile de donner BC (on mesure environ 4,1 cm), il découle des autres.

Réponse. $[AB]$ de 7 cm ; angle de $35°$ en A ; $AC = 5$ cm ; tracer $[BC]$.

Correction de l’exercice 13 – Le cercle qui passe par les trois sommets

a) Le centre est à la même distance de tous les points du cercle :

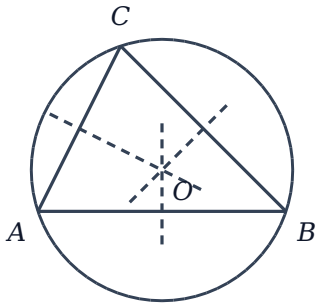
$$OA = OB = OC$$

— $OA = OB$: O est à égale distance de A et B, il est donc sur la **médiatrice** de $[AB]$. De même, $OB = OC$: O est sur la médiatrice de $[BC]$.
— b) On trace deux médiatrices (au compas ou à la règle et l’équerre à partir du milieu) : O est leur point d’intersection. On trace ensuite le cercle de centre O passant par A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— La troisième médiatrice passe elle aussi par O (puisque $OA = OC$) : elle sert de **contrôle**. Ce cercle s'appelle le **cercle circonscrit** au triangle.

Réponse. O est à l'intersection des médiatrices ; $OA = OB = OC$.



Correction de l'exercice 14 – Trois villages et une antenne

a) Le plus grand côté est AB :

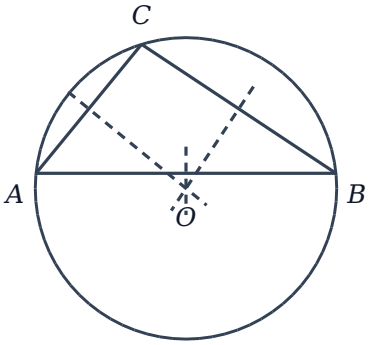
$$AB < BC + CA \quad \text{soit} \quad 9 < 7 + 5 = 12$$

— C'est possible. Sur le plan, $[AB]$ mesure 9 cm ; arcs de 5 cm (centre A) et 7 cm (centre B) pour placer C.

— b) L'antenne O doit vérifier $OA = OB = OC$: c'est le centre du **cercle circonscrit**, à l'intersection des médiatrices des côtés.

— Sur la figure, l'antenne est **hors du triangle**, de l'autre côté de la route $[AB]$: cela arrive quand le triangle a un angle obtus (ici en C). On mesure $OA \approx 4{,}5$ cm, soit environ 4,5 km de chaque village.

Réponse. a) possible ($9 < 12$) · b) au croisement des médiatrices, à environ 4,5 km de chaque village.



Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quelles données suffisent ?

a) $4 + 5 = 9 < 10$: les arcs de 4 cm et 5 cm tracés aux extrémités d'un segment de 10 cm ne se rejoignent pas. **Aucun** triangle.

b) $90 + 90 = 180$: il ne reste rien pour $\hat{C}$; les deux perpendiculaires à $[AB]$ sont parallèles et ne se coupent jamais. **Aucun** triangle.

c) Un côté et ses deux angles adjacents, avec $40 + 70 = 110 < 180$: **un seul** triangle, et

$$\hat{C} = 180° - 40° - 70° = 70°$$

d) Aucune longueur : **une infinité** de triangles équilatéraux, de toutes les tailles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) aucun · b) aucun · c) un seul ($\hat{C} = 70°$) · d) une infinité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).