

Plaquette 4 – Le parallélogramme : propriétés et démonstrations

Triangles et quadrilatères — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le parallélogramme.

- **Définition** : $ABCD$ est un parallélogramme si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux : $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.
- **Propriétés** : dans un parallélogramme $ABCD$ de centre O ,

$$AB = DC \quad AD = BC \quad OA = OC \quad OB = OD$$
- les angles opposés sont égaux et deux angles consécutifs sont supplémentaires :

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$
- **Pour démontrer** qu'un quadrilatère (non croisé) est un parallélogramme, il suffit de l'une de ces propriétés :
- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
- ses diagonales ont le même milieu ;
- ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux ;
- deux côtés opposés sont parallèles **et** de même longueur.
- Périmètre : $P = 2 \times (AB + BC)$.

Correction de l'exercice 1 – Construire un parallélogramme

On commence par le triangle ABD : $[AB]$ de 6 cm, angle de 60° au rapporteur en A , puis $AD = 4$ cm.

Méthode 1 (compas) : les côtés opposés ont la même longueur,

$$DC = AB = 6 \text{ cm} \quad BC = AD = 4 \text{ cm}$$

- C est à l'intersection de l'arc de centre D et de rayon 6 cm et de l'arc de centre B et de rayon 4 cm (du côté opposé à A).
- **Méthode 2 (parallèles)** : on trace la parallèle à (AB) passant par D et la parallèle à (AD) passant par B ; elles se coupent en C .
- Contrôle : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ doivent se couper en leur milieu.

Réponse. C : arcs de 6 cm (centre D) et 4 cm (centre B), ou intersection de deux parallèles.

Correction de l'exercice 2 – Côtés et périmètre

Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

a) $CD = AB = 7$ cm et $AD = BC = 4,5$ cm.

b) Le périmètre compte deux fois chaque longueur :

$$P = 2 \times (AB + BC) = 2 \times (7 + 4,5) = 23 \text{ cm}$$

- c) $AB + BC = 30 \div 2 = 15$ cm (demi-périmètre). Le côté voisin du côté de 9 cm mesure donc $15 - 9 = 6$ cm.
- Les quatre côtés mesurent 9 cm, 6 cm, 9 cm, 6 cm. Contrôle : $9 + 6 + 9 + 6 = 30$.

Réponse. a) $CD = 7$ cm, $AD = 4,5$ cm · b) 23 cm · c) 9 cm, 6 cm, 9 cm, 6 cm.

Correction de l'exercice 3 - Diagonales et milieu

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur **milieu** O :

$$OA = OC = \frac{AC}{2} \quad OB = OD = \frac{BD}{2}$$

- a) $AC = 2 \times OA = 2 \times 3,7 = 7,4$ cm.
- $OB = OD = 5 \div 2 = 2,5$ cm.
- b) **Non** : $OA = 3,7$ cm et $OB = 2,5$ cm. Les diagonales d'un parallélogramme quelconque n'ont pas la même longueur ; elles ne sont égales que dans un rectangle.

Réponse. a) $AC = 7,4$ cm, $OB = OD = 2,5$ cm · b) non.

Correction de l'exercice 4 - Un angle triple de l'autre

Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires :

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

- En notant $x = \hat{A}$: $x + 3x = 180$, donc $4x = 180$ et $x = 45^\circ$.
- $\hat{A} = 45^\circ$ et $\hat{B} = 3 \times 45 = 135^\circ$.
- Les angles opposés sont égaux : $\hat{C} = \hat{A} = 45^\circ$ et $\hat{D} = \hat{B} = 135^\circ$.
- Contrôle : $45 + 135 + 45 + 135 = 360^\circ$.

Réponse. $\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$, $\hat{B} = \hat{D} = 135^\circ$.

Correction de l'exercice 5 - Par la définition

- **On sait que** les côtés opposés de $EFGH$ sont parallèles deux à deux : $(EF) \parallel (HG)$ et $(EH) \parallel (FG)$.
- **Définition** :
côtés opposés parallèles deux à deux $\implies$ parallélogramme
- **Donc** $EFGH$ est un parallélogramme.
- Remarque : on n'a eu besoin d'aucune mesure. On peut en déduire ensuite toutes les propriétés : $EF = HG$, diagonales de même milieu, etc.

Réponse. Un parallélogramme (côtés opposés parallèles).

Correction de l'exercice 6 - Par les longueurs des côtés

On repère les côtés **opposés** : $[KL]$ et $[MN]$, puis $[LM]$ et $[NK]$.

- $KL = MN = 5$ cm et $LM = NK = 3$ cm : les côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
- **Propriété** :
côtés opposés de même longueur $\implies$ parallélogramme

- $KLMN$ est un parallélogramme (la condition « non croisé » est indispensable : un quadrilatère croisé peut avoir ces longueurs sans être un parallélogramme).

Réponse. Un parallélogramme.

Correction de l'exercice 7 - Parallèles et de même longueur

- **On sait que** $[PQ]$ et $[SR]$ sont deux côtés opposés, **parallèles** et de **même longueur** (4 cm).
- **Propriété** :

deux côtés opposés parallèles et de même longueur $\Rightarrow$ parallélogramme

- **Donc** $PQRS$ est un parallélogramme.
- Conséquence : les deux autres côtés sont eux aussi parallèles et de même longueur, $(PS) \parallel (QR)$ et $PS = QR$, sans qu'on ait eu besoin de les mesurer.

Réponse. Parallélogramme : $(PQ) \parallel (SR)$ et $PQ = SR$.

Correction de l'exercice 8 - Le piège du trapèze isocèle

L'élève utilise deux informations qui ne portent **pas** sur les mêmes côtés : le parallélisme concerne $[AB]$ et $[DC]$, l'égalité concerne $[AD]$ et $[BC]$.

- La figure donne un **contre-exemple** : ce trapèze isocèle vérifie $(AB) \parallel (DC)$ et $AD = BC$, mais $AB = 6 \neq DC = 3$: ce n'est pas un parallélogramme.
- L'élève a donc **tort**. La bonne propriété exige que ce soient les **mêmes** côtés :

$$(AB) \parallel (DC) \text{ et } AB = DC \Rightarrow \text{parallélogramme}$$

- Pour réfuter une affirmation, un seul contre-exemple suffit.

Réponse. Non : un trapèze isocèle est un contre-exemple.

Correction de l'exercice 9 - Sur un quadrillage

On compare les « déplacements » le long de deux côtés opposés.

- De A à B : 4 carreaux à droite et 1 en haut.
- De D à C : 4 carreaux à droite et 1 en haut.
- Même déplacement : les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont **parallèles**, de **même longueur** et de même sens. Donc :

$$(AB) \parallel (DC) \text{ et } AB = DC \Rightarrow \text{parallélogramme}$$

- Contrôle par les diagonales : le milieu de $[AC]$ est à mi-chemin (2,5 à droite, 2 en haut de A), et celui de $[BD]$ aussi (1,5 à gauche, 1 en haut de B) : c'est le même point.

Réponse. Oui : $A \rightarrow B$ et $D \rightarrow C$ font le même déplacement (4 à droite, 1 en haut).

Correction de l'exercice 10 - Placer le quatrième sommet

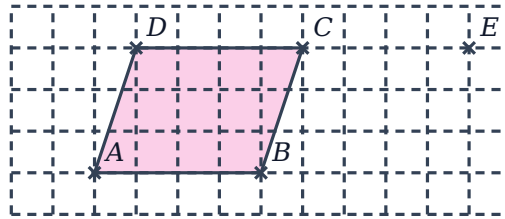
Dans un parallélogramme, deux côtés opposés correspondent au **même déplacement** : on l'utilise pour placer le sommet manquant.

$$ABCD \text{ parallélogramme} \Rightarrow \text{déplacement } A \rightarrow B = \text{déplacement } D \rightarrow C$$

- a) De A à B : 4 carreaux à droite. D est donc à 4 carreaux **à gauche** de C (même ligne).
- b) Pour $ABEC$, les côtés opposés sont $[AB]$ et $[CE]$ (dans l'ordre des lettres, $A \rightarrow B$ correspond à $C \rightarrow E$). E est à 4 carreaux **à droite** de C .

- L'ordre des lettres compte : avec les mêmes trois points, on obtient deux parallélogrammes différents.

Réponse. a) D : 4 carreaux à gauche de C · b) E : 4 carreaux à droite de C .



Correction de l'exercice 11 - Deux cercles de même centre

- $[AC]$ est un diamètre : il passe par le centre et $OA = OC$ (deux rayons du grand cercle). Donc O est le milieu de $[AC]$.
- De même, O est le milieu de $[BD]$.
- Les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu :
diagonales de même milieu $\Rightarrow$ parallélogramme
- Ce n'est **pas** un rectangle : ses diagonales n'ont pas la même longueur (AC est un diamètre du grand cercle, BD du petit, donc $AC > BD$).

Réponse. Un parallélogramme, pas un rectangle ($AC \neq BD$).

Correction de l'exercice 12 - Angles avec la diagonale

- $\hat{DAB} = 40 + 30 = 70^\circ$.
- Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux : $\hat{BCD} = \hat{DAB} = 70^\circ$.
- $(AB) \parallel (DC)$ et (AC) est une sécante : $\hat{ACD}$ et $\hat{BAC}$ sont **alternes-internes**, donc égaux :

$$\hat{ACD} = \hat{BAC} = 40^\circ$$

- Deux angles consécutifs sont supplémentaires : $\hat{ABC} = 180 - 70 = 110^\circ$.
- Contrôle dans le triangle ABC : $\hat{BCA} = 70 - 40 = 30^\circ$ et $40 + 110 + 30 = 180$.

Réponse. 70° , 70° , 40° et 110° .

Correction de l'exercice 13 - Un parallélogramme et un triangle isocèle

- a) $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A , ses angles à la base sont égaux : $\hat{ACB} = \hat{ABC} = 65^\circ$. Puis :

$$\hat{BAC} = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$$

- b) Angles opposés du parallélogramme : $\hat{ADC} = \hat{ABC} = 65^\circ$.
- Angles consécutifs supplémentaires : $\hat{BAD} = 180 - 65 = 115^\circ$.
- $\hat{CAD} = \hat{BAD} - \hat{BAC} = 115 - 50 = 65^\circ$.
- On remarque que $\hat{CAD} = \hat{ADC} = 65^\circ$: le triangle ACD est isocèle en C , donc $CA = CD$. C'est cohérent : $CD = AB = AC$.

Réponse. a) 65° , 65° , 50° · b) $\hat{ADC} = 65^\circ$, $\hat{BAD} = 115^\circ$, $\hat{CAD} = 65^\circ$.

Correction de l'exercice 14 - L'étagère pliante

a) **Non** : les longueurs des barres ne changent pas.

$$P = 2 \times (40 + 25) = 130 \text{ cm}$$

b) Angles consécutifs supplémentaires : $\hat{B} = 180 - 50 = 130^\circ$. Angles opposés égaux : $\hat{C} = 50^\circ$ et $\hat{D} = 130^\circ$.

c) Quelle que soit l'ouverture, $ABCD$ a ses côtés opposés de même longueur : il reste un **parallélogramme**, donc $(DC) \parallel (AB)$. Si la barre $[AB]$ est fixée horizontalement, la tablette $[DC]$ reste horizontale.

Réponse. a) non, 130 cm · b) 130° , 50° , 130° · c) côtés opposés toujours parallèles.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : choisir la bonne propriété

a) **Oui** : côtés opposés de même longueur deux à deux.

b) **Non** : ce ne sont pas les mêmes côtés ; le trapèze isocèle est un contre-exemple.

c) **Oui**, caractérisation par les diagonales :

$$\text{diagonales de même milieu} \implies \text{parallélogramme}$$

d) **Oui**. On prolonge $[AB]$ au-delà de B : l'angle extérieur en B vaut $180 - 70 = 110^\circ = \hat{A}$. Ces deux angles sont correspondants (sécante (AB)), donc $(AD) \parallel (BC)$. De même, on obtient $(AB) \parallel (DC)$: les côtés opposés sont parallèles.

Réponse. a) oui · b) non · c) oui · d) oui.