

Plaquette 5 - Rectangle, losange et carré

Triangles et quadrilatères — Cinquième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Parallélogrammes particuliers.

- **Rectangle** : quatre angles droits ; diagonales de **même milieu** et de **même longueur**. Un parallélogramme qui a un angle droit, ou des diagonales de même longueur, est un rectangle.
- **Losange** : quatre côtés égaux ; diagonales de même milieu et **perpendiculaires** (elles sont aussi axes de symétrie et coupent les angles en deux). Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux, ou des diagonales perpendiculaires, est un losange.
- **Carré** : à la fois rectangle **et** losange.

$$\text{carré} = \text{rectangle} \cap \text{losange}$$

- Diagonales d'un rectangle de centre O :

$$OA = OB = OC = OD = \frac{AC}{2}$$

- Périmètre d'un losange de côté c : $P = 4 \times c$.

Correction de l'exercice 1 - Les diagonales du rectangle

- a) Les diagonales d'un rectangle ont le même milieu **et** la même longueur, donc $BD = AC = 10$ cm et

$$OA = OB = OC = OD = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

- b) $OA = OB$: le triangle AOB est **isocèle** en O . Ses angles à la base sont égaux : $\hat{O}BA = \hat{O}AB = 35^\circ$.
- Somme des angles : $\hat{A}OB = 180 - 35 - 35 = 110^\circ$.
- Les quatre triangles formés par les diagonales d'un rectangle sont isocèles en O .

Réponse. a) 5 cm chacun · b) isocèle en O ; $\hat{O}BA = 35^\circ$, $\hat{A}OB = 110^\circ$.

Correction de l'exercice 2 - Les angles du losange

Le losange est un parallélogramme : angles opposés égaux, angles consécutifs supplémentaires.

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

- a) $\hat{B} = 180 - 70 = 110^\circ$, $\hat{C} = \hat{A} = 70^\circ$, $\hat{D} = \hat{B} = 110^\circ$.
- b) Dans un losange, chaque diagonale est un **axe de symétrie** : elle partage l'angle en deux angles égaux. $\hat{B}AC = 70 \div 2 = 35^\circ$.
- Contrôle : ABC est isocèle en B ($BA = BC$), donc $\hat{B}CA = 35^\circ$ et $35 + 110 + 35 = 180$.

Réponse. a) 110° , 70° , 110° · b) 35° .

Correction de l'exercice 3 - Diagonales perpendiculaires

Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires** : $E\hat{O}F = 90^\circ$.

- Le triangle EOF est donc rectangle en O ; ses deux angles aigus sont complémentaires :

$$O\hat{E}F + O\hat{F}E = 90^\circ$$

- $O\hat{F}E = 90 - 28 = 62^\circ$.
- On en déduit les angles du losange : $H\hat{E}F = 2 \times 28 = 56^\circ$ et $E\hat{F}G = 2 \times 62 = 124^\circ$ (et $56 + 124 = 180$).

Réponse. $E\hat{O}F = 90^\circ$ et $O\hat{F}E = 62^\circ$.

Correction de l'exercice 4 - Un angle droit suffit

- **On sait que** $ABCD$ est un parallélogramme : deux angles consécutifs sont supplémentaires et deux angles opposés égaux.
- $\hat{B} = 180 - 90 = 90^\circ$, $\hat{C} = \hat{A} = 90^\circ$, $\hat{D} = \hat{B} = 90^\circ$: les quatre angles sont droits.
- **Propriété** :
parallélogramme avec un angle droit $\Rightarrow$ rectangle
- **Donc** $ABCD$ est un rectangle. Il suffit de vérifier **un** angle droit, pas quatre, dès que l'on sait que c'est un parallélogramme.

Réponse. Parallélogramme avec un angle droit, donc rectangle.

Correction de l'exercice 5 - Le cadre du menuisier

- Les côtés opposés ont la même longueur deux à deux : le cadre est d'abord un **parallélogramme** (quel que soit l'angle, il peut « se déformer »).
- Les diagonales ont la même longueur (94,3 cm). **Propriété** :
parallélogramme à diagonales de même longueur $\Rightarrow$ rectangle
- Le cadre est donc bien rectangulaire. Si le cadre était de travers (un parallélogramme non rectangle), une diagonale serait plus longue que l'autre.
- C'est plus précis que l'équerre sur un grand cadre : une petite différence de diagonales se mesure facilement.

Réponse. Parallélogramme (côtés opposés égaux) à diagonales égales, donc rectangle.

Correction de l'exercice 6 - Deux côtés consécutifs égaux

- Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux : $CD = AB = 4$ cm et $BC = AD = 4$ cm.
- Les quatre côtés mesurent donc 4 cm. **Propriété** :
parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux $\Rightarrow$ losange
- $ABCD$ est un losange. Son périmètre : $P = 4 \times 4 = 16$ cm.
- Attention : les côtés doivent être **consécutifs** ($[AB]$ et $[AD]$ ont le sommet A en commun). Deux côtés opposés égaux, c'est vrai dans tout parallélogramme.

Réponse. Losange ; périmètre 16 cm.

Correction de l'exercice 7 – Diagonales perpendiculaires : quelle nature ?

a) Diagonales de même milieu : $ABCD$ est un parallélogramme. Elles sont de plus perpendiculaires :

parallélogramme à diagonales perpendiculaires $\Rightarrow$ losange

— $ABCD$ est un **losange**.

— b) Pour un carré, il faudrait **aussi** des diagonales de même longueur. Or $AC = 8$ cm et $BD = 5$ cm : ce n'est **pas** un carré.

Réponse. a) un losange · b) non, $AC \neq BD$.

Correction de l'exercice 8 – Reconnaître un carré

Les deux diagonales sont des diamètres du même cercle.

— Elles ont le **même milieu** O (le centre) : $ABCD$ est un parallélogramme.

— Elles ont la **même longueur** (deux diamètres) : c'est un rectangle.

— Elles sont **perpendiculaires** : c'est aussi un losange.

— Rectangle et losange à la fois :

rectangle + losange $\Rightarrow$ carré

— Diagonales : $AC = BD = 2 \times 3 = 6$ cm.

Réponse. Un carré ; diagonales de 6 cm.

Correction de l'exercice 9 – Périmètres de losanges

Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur c :

$$P = 4 \times c$$

a) $P = 4 \times 6,5 = 26$ cm.

b) $c = 34 \div 4 = 8,5$ cm.

c) **Non**. Un losange et un carré de même périmètre ont le même côté, mais le losange est « aplati » : plus l'angle aigu est petit, plus son aire est faible. Le carré est le losange d'aire maximale. (On peut s'en convaincre avec un losange articulé de quatre baguettes : son aire tend vers 0 quand on l'écrase.)

Réponse. a) 26 cm · b) 8,5 cm · c) non.

Correction de l'exercice 10 – Le tableau des propriétés

Propriété	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
Côtés opposés parallèles	oui	oui	oui	oui
Quatre côtés égaux	non	non	oui	oui
Quatre angles droits	non	oui	non	oui
Diagonales de même longueur	non	oui	non	oui
Diagonales perpendiculaires	non	non	oui	oui

— La première ligne est vraie partout : les quatre figures sont des parallélogrammes (leurs diagonales ont le même milieu).

— Le carré cumule les propriétés du rectangle et du losange :

carré = rectangle $\cap$ losange

Réponse. Le carré a tout ; le rectangle : angles droits et diagonales égales ; le losange : côtés égaux et diagonales perpendiculaires.

Correction de l'exercice 11 - Losange à 60°

a) $AB = AD = 5$ cm (côtés du losange) : le triangle ABD est isocèle en A . Ses angles à la base sont égaux :

$$\hat{ABD} = \hat{ADB} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

- Les trois angles valent 60° : ABD est **équilatéral**.
- b) Donc $BD = AB = 5$ cm : la petite diagonale est égale au côté.
- Le losange est formé de deux triangles équilatéraux (ABD et CBD) : c'est la forme des losanges des pavages en « cubes ».

Réponse. a) équilatéral · b) $BD = 5$ cm.

Correction de l'exercice 12 - Rectangle et triangle isocèle

Dans un rectangle, $OA = OB = OC = OD$: les triangles formés par les diagonales sont isocèles en O .

- Triangle AOB isocèle en O :

$$\hat{OAB} = \hat{OBA} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

- A, O, C sont alignés : $\hat{BOC} = 180 - 120 = 60^\circ$ (angles supplémentaires).
- Triangle BOC isocèle en O avec un angle de 60° : $\hat{OBC} = \hat{OCB} = (180 - 60) \div 2 = 60^\circ$. Il est même **équilatéral**.
- Contrôle : $\hat{OBA} + \hat{OBC} = 30 + 60 = 90^\circ$, l'angle droit du rectangle en B .

Réponse. $\hat{OAB} = 30^\circ$, $\hat{BOC} = 60^\circ$, $\hat{OBC} = 60^\circ$.

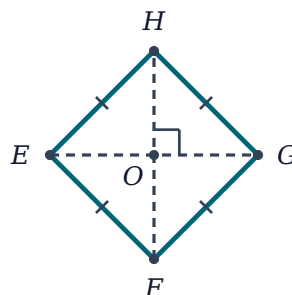
Correction de l'exercice 13 - Programme de construction : quelle figure ?

On étudie les diagonales $[EG]$ et $[FH]$.

- O est le milieu de $[EG]$ et, puisque $OF = OH$, le milieu de $[FH]$: **parallélogramme**.
- (FH) est la médiatrice de $[EG]$: les diagonales sont **perpendiculaires**, c'est un losange.
- $FH = 3 + 3 = 6$ cm = EG : les diagonales ont la même longueur, c'est un rectangle.
- Losange et rectangle :

diagonales de même milieu, perpendiculaires et de même longueur $\Rightarrow$ carré

Réponse. Un carré.



Correction de l'exercice 14 - Démontrer avec la symétrie

a) O est le milieu de $[BC]$ (énoncé) et de $[AD]$ (symétrique) : $ABDC$ est un parallélogramme. Il a un angle droit en A :

parallélogramme avec un angle droit $\Rightarrow$ rectangle

- b) Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ d'un rectangle ont la même longueur et le même milieu O , donc $OA = OD = OB = OC$.
- O est à égale distance des trois sommets du triangle : c'est le **centre du cercle circonscrit**. Pour un triangle rectangle, ce centre est le **milieu de l'hypoténuse**.

Réponse. a) parallélogramme avec un angle droit · b) O est le centre du cercle circonscrit (milieu de l'hypoténuse).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : vrai ou faux

a) **Vrai** : un carré a quatre côtés égaux.

b) **Faux** : un losange n'a en général pas d'angle droit (contre-exemple : le losange à 60°).

c) **Vrai** : quatre côtés égaux donnent des côtés opposés égaux (c'est un parallélogramme), avec deux côtés consécutifs égaux.

d) **Vrai** : diagonales perpendiculaires (losange) et de même longueur (rectangle).

losange + rectangle = carré

e) **Vrai** : un rectangle est un parallélogramme ; avec deux côtés consécutifs égaux, c'est aussi un losange, donc un carré.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) vrai · e) vrai.