Plaquette 1 – Décrire les solides : prismes et pyramides

Les solides — CM2

Corrections détaillées

Boîte à outils

Compter faces, arêtes, sommets.

Solide (base à n côtés)	faces	arêtes	sommets
prisme droit	$n+2$	$3\times n$	$2\times n$
pyramide	$n+1$	$2\times n$	$n+1$

— Cube et pavé droit : ce sont des prismes à base carrée ou rectangulaire ($n=4$) : 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets.
— Pour tout polyèdre de ce chapitre :

$$\text{faces} + \text{sommets} - \text{arêtes} = 2$$

Correction de l'exercice 1 – Polyèdre ou non ?

a) Cube : polyèdre.
b) Prisme droit à base triangulaire : polyèdre.
c) Cylindre : pas un polyèdre (surface courbe).
d) Pyramide à base carrée : polyèdre.
e) Cône : pas un polyèdre.
f) Pavé droit : polyèdre.

$$4 \text{ polyèdres} + 2 \text{ solides « ronds »} = 6$$

— Test simple : un polyèdre ne peut pas rouler, car toutes ses faces sont planes.

Réponse. Polyèdres : a, b, d, f ; non : c, e.

Correction de l'exercice 2 – Le prisme à base triangulaire

— Faces : 2 bases triangulaires et 3 faces latérales rectangulaires, soit 5 faces.
— Arêtes : 3 sur chaque base et 3 qui les relient : 9 arêtes.
— Sommets : 3 par base : 6 sommets.

$$5 + 6 - 9 = 2$$

— La formule du tableau donne bien, avec $n=3$: $3+2=5$ faces, $3\times 3=9$ arêtes, $2\times 3=6$ sommets.

Réponse. 5 faces (2 triangles, 3 rectangles), 9 arêtes, 6 sommets.

Correction de l'exercice 3 – La pyramide à base carrée

— Faces : la base carrée et 4 triangles : 5 faces.
— Arêtes : 4 autour de la base, 4 qui montent au sommet : 8 arêtes.
— Sommets : 4 pour la base et le sommet principal : 5 sommets.

$$5 + 5 - 8 = 2$$

— Avec $n=4$: $4+1=5$ faces, $2\times 4=8$ arêtes, $4+1=5$ sommets.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les pyramides d'Égypte ont cette forme.

Réponse. 5 faces, 8 arêtes, 5 sommets.

Correction de l'exercice 4 – La famille des prismes

Faces : les 2 bases et une face latérale par côté. Arêtes : celles des deux bases et une par sommet de la base. Sommets : ceux des deux bases.

Côtés de la base	3	4	5	6
Faces	5	6	7	8
Arêtes	9	12	15	18
Sommets	6	8	10	12

$$6 \text{ côtés} : 3 \times 6 = 18 \text{ arêtes}$$

Réponse. Faces $5, 6, 7, 8$; arêtes $9, 12, 15, 18$; sommets $6, 8, 10, 12$.

Correction de l'exercice 5 – La famille des pyramides

Faces : la base et un triangle par côté. Arêtes : celles de la base et une par sommet de la base vers le sommet principal. Sommets : ceux de la base et le sommet principal.

Côtés de la base	3	4	5	6
Faces	4	5	6	7
Arêtes	6	8	10	12
Sommets	4	5	6	7

$$6 \text{ côtés} : 2 \times 6 = 12 \text{ arêtes}$$

— Une pyramide a toujours autant de faces que de sommets.

Réponse. Faces $4, 5, 6, 7$; arêtes $6, 8, 10, 12$; sommets $4, 5, 6, 7$.

Correction de l'exercice 6 – Qui suis-je ?

a) Le **cube**.
b) Le **prisme droit à base triangulaire**.
c) La **pyramide à base triangulaire** (le tétraèdre) : sa base est aussi un triangle.
d) Le **cône**.
e) Le **pavé droit**.

$$\text{tétraèdre} : 4 \text{ faces}, 6 \text{ arêtes}, 4 \text{ sommets}$$

— Dans le tétraèdre, n'importe quelle face peut servir de base.

Réponse. a) cube · b) prisme triangulaire · c) pyramide à base triangulaire · d) cône · e) pavé droit.

Correction de l'exercice 7 – Les faces du pavé

Les six faces : *ABCD* (dessous), *EFGH* (dessus), *ABFE* (devant), *DCGH* (derrière), *ADHE* (gauche), *BCGF* (droite).

— Face opposée à *ABCD* : *EFGH*.
— Face opposée à *ABFE* : *DCGH*.

$$3 \text{ paires de faces opposées} \times 2 = 6 \text{ faces}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Deux faces opposées sont des rectangles identiques.

Réponse. *ABCD*, *EFGH*, *ABFE*, *DCGH*, *ADHE*, *BCGF* ; opposées : *EFGH* et *DCGH*.

Correction de l’exercice 8 – Les arêtes cachées

Les arêtes en pointillé sont [*CD*], [*DA*] et [*DH*] : elles partent du sommet *D*, caché derrière le pavé. On les dessine en pointillé parce qu’on ne les voit pas.

— Arêtes parallèles à [*AE*] (les arêtes « verticales ») : [*BF*], [*CG*] et [*DH*].

$$4 \text{ arêtes verticales : } [AE], [BF], [CG], [DH]$$

— En perspective, les arêtes parallèles restent parallèles sur le dessin.

Réponse. [*CD*], [*DA*], [*DH*] (sommet *D* caché) ; [*BF*], [*CG*], [*DH*].

Correction de l’exercice 9 – Une relation magique

— Cube : $6 + 8 - 12 = 2$.
— Pyramide à base triangulaire : $4 + 4 - 6 = 2$.
— Prisme à base hexagonale : $8 + 12 - 18 = 2$.

$$F + S - A = 2$$

— On trouve toujours 2 ! C’est la relation d’Euler, du nom d’un mathématicien suisse du 18^{e} siècle. Elle permet de vérifier un comptage : si on ne trouve pas 2, on s’est trompé.

Réponse. On trouve toujours 2.

Correction de l’exercice 10 – Le crayon

La base a 6 côtés ($n = 6$).

— Faces : $6 + 2 = 8$, dont 6 faces latérales rectangulaires et 2 bases hexagonales.
— Arêtes : $3 \times 6 = 18$.
— Sommets : $2 \times 6 = 12$.

$$8 + 12 - 18 = 2$$

— La forme hexagonale empêche le crayon de rouler sur la table.

Réponse. 8 faces (dont 6 rectangles), 18 arêtes, 12 sommets.

Correction de l’exercice 11 – L’erreur de Max

Non. Max confond sommets et arêtes. La pyramide à base carrée a :

— 4 sommets sur la base et 1 sommet principal : 5 sommets ;
— 8 arêtes.

$$5 + 5 - 8 = 2$$

— La relation d’Euler confirme le comptage.
— Le cube a bien 8 sommets, mais aussi 12 arêtes : $6 + 8 - 12 = 2$.

Réponse. Non : 5 sommets (et 8 arêtes).

Correction de l’exercice 12 – Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : deux bases carrées identiques et parallèles, faces latérales rectangulaires (carrées).
b) **Vrai** : $2 \times n$ arêtes, un nombre pair.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) **Faux** : il a une surface courbe.

d) **Vrai** : $5 + 2 = 7$.

$$\text{arêtes d'une pyramide} = 2 \times n$$

Réponse. a) vrai · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l’exercice 13 – Le solide mystère

— Si c’était une pyramide, elle aurait autant de faces que de sommets : $7 \neq 10$, ce n’est pas une pyramide.

— Pour un prisme : $2 \times n = 10$ sommets, donc $n = 5$. Vérification : $3 \times 5 = 15$ arêtes et $5 + 2 = 7$ faces.

$$7 + 10 - 15 = 2$$

— C’est un **prisme droit à base pentagonale** (base à 5 côtés).

Réponse. Un prisme droit à base pentagonale.

Correction de l’exercice 14 – Des pailles et de la pâte à modeler

On compte arêtes (pailles) et sommets (boules).

a) Cube : 12 pailles, 8 boules.

b) Prisme triangulaire : 9 pailles, 6 boules.

c) Pyramide à base hexagonale : $2 \times 6 = 12$ pailles et $6 + 1 = 7$ boules.

$$12 + 9 + 12 = 33 \text{ pailles en tout}$$

— Le cube et la pyramide hexagonale demandent le même nombre de pailles, mais pas de boules.

Réponse. a) 12 et 8 · b) 9 et 6 · c) 12 et 7.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : le tableau des solides

On applique les règles des prismes ($n + 2$, $2n$, $3n$) et des pyramides ($n + 1$, $n + 1$, $2n$).

Solide	faces	sommets	arêtes	$F + S - A$
pavé droit	6	8	12	2
prisme à base pentagonale	7	10	15	2
pyramide à base pentagonale	6	6	10	2
tétraèdre	4	4	6	2

$$6 + 6 - 10 = 2$$

Réponse. Voir le tableau : on trouve 2 à chaque ligne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).