Plaquette 4 – Les propriétés de la symétrie

Symétrie axiale — CM2

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ce que la symétrie conserve.

— Longueurs : $A'B' = AB$. Angles : $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C$.

— Alignement, parallélisme, milieux : si I est le milieu de $[AB]$, I' est le milieu de $[A'B']$.

— Périmètres et aires de la figure image identiques.

$$AB = 4 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A'B' = 4 \text{ cm}$$

— Dans une figure qui a un axe de symétrie, deux éléments symétriques ont la même mesure.

— Tout point de l'axe de symétrie d'un segment $[AB]$ est à égale distance de A et de B.

Correction de l'exercice 1 – Les longueurs

En pliant le long de (d), le segment $[AB]$ vient exactement sur $[A'B']$: ils ont la même longueur.

$$A'B' = AB = 4 \text{ cm}$$

— La symétrie axiale conserve les longueurs.

— C'est aussi pour cela qu'une figure et son image ont le même périmètre.

— On peut le vérifier en reportant AB au compas sur $[A'B']$.

Réponse. $A'B' = 4$ cm.

Correction de l'exercice 2 – Les angles

La symétrie conserve les angles.

— $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C = 90°$: le triangle image est aussi rectangle, en A'.

— $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C = 35°$.

$$A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C = 35°$$

— Un angle droit reste droit : c'est pourquoi le symétrique d'un carré est un carré, et celui d'un rectangle un rectangle.

Réponse. 90° et 35°.

Correction de l'exercice 3 – L'alignement

Oui. Les points A, B, C sont sur un même segment $[AC]$; l'image de ce segment est le segment $[A'C']$, qui contient donc B'.

$$B \in [AC] \quad \Rightarrow \quad B' \in [A'C']$$

— B' est entre A' et C', et $A'B' = AB$, $B'C' = BC$.

— La symétrie conserve l'alignement et l'ordre des points sur une droite.

Réponse. Oui, et B' est entre A' et C'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 4 – Périmètre et aire

La symétrie conserve les longueurs et les angles droits : F' est un **rectangle de** 5 **cm sur** 3 **cm**.

$$P' = 2 \times (5 + 3) = 16 \text{ cm} \qquad A' = 5 \times 3 = 15 \text{ cm}^2$$

— Le périmètre et l’aire sont les mêmes que ceux du rectangle de départ.
— La position de l’axe n’a aucune importance : l’image est toujours superposable au rectangle.

Réponse. Un rectangle de 5 cm sur 3 cm ; 16 cm et 15 cm².

Correction de l’exercice 5 – Le milieu

La symétrie conserve les longueurs et l’alignement :

— I' est sur $[E'F']$ (car I est sur $[EF]$) ;
— $E'I' = EI$ et $I'F' = IF$, donc $E'I' = I'F'$.

$$E'I' = EI = 6 \div 2 = 3 \text{ cm}$$

— I' est le **milieu** de $[E'F']$: la symétrie conserve les milieux.
— Il suffit donc de construire E' et F', puis le milieu de $[E'F']$.

Réponse. I' est le milieu de $[E'F']$; $E'I' = 3$ cm.

Correction de l’exercice 6 – Des droites parallèles

Oui. Si (d_1') et (d_2') se coupaient en un point M, alors, en repliant, (d_1) et (d_2) se couperaient au symétrique de M : c’est impossible puisqu’elles sont parallèles.

$$(d_1) \parallel (d_2) \quad \Rightarrow \quad (d_1') \parallel (d_2')$$

— De même, la symétrie conserve les angles droits : si $(d_1) \perp (d_3)$, alors $(d_1') \perp (d_3')$.
— C’est ce qui garantit que l’image d’un parallélogramme est un parallélogramme.

Réponse. Oui, parallèles ; et $(d_1') \perp (d_3')$.

Correction de l’exercice 7 – Le sens de rotation

La symétrie **retourne** la figure : l’ordre des sommets est inversé.

— En parcourant A', B', C', on tourne dans le sens des aiguilles d’une montre.

$$\text{sens de } ABC \neq \text{sens de } A'B'C'$$

— C’est ce qui se passe dans un miroir : la main droite devient une main gauche.
— La symétrie conserve longueurs et angles, mais pas le sens.

Réponse. Dans le sens des aiguilles d’une montre (sens inversé).

Correction de l’exercice 8 – Le cerf-volant

Par la symétrie d’axe (AC), A et C sont sur l’axe (ils restent en place) et B a pour image D.

— Donc $[AB]$ a pour image $[AD]$: $AD = AB = 3$ cm.
— $[CB]$ a pour image $[CD]$: $DC = BC = 5$ cm.

$$P = 3 + 5 + 5 + 3 = 16 \text{ cm}$$

— Ce quadrilatère en forme de cerf-volant a deux paires de côtés consécutifs égaux.

Réponse. $AD = 3$ cm ; $DC = 5$ cm ; $P = 16$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Un angle par symétrie

L'angle $A\hat{B}C$ a pour image $A\hat{D}C$ (car $A \to A$, $B \to D$, $C \to C$).

$$A\hat{D}C = A\hat{B}C = 110°$$

— De même, $B\hat{A}C$ a pour image $D\hat{A}C$: $D\hat{A}C = 50°$.

— L'axe (AC) partage l'angle $B\hat{A}D$ en deux angles égaux : $B\hat{A}D = 50° + 50° = 100°$.

Réponse. $A\hat{D}C = 110°$; $D\hat{A}C = 50°$.

Correction de l'exercice 10 – L'erreur de Hugo

Non. La symétrie axiale conserve toutes les longueurs, quelle que soit la distance à l'axe : la figure image a exactement les mêmes dimensions.

$$A'B' = AB \quad \text{toujours}$$

— Seule la **position** change : l'image est à la même distance de l'axe, de l'autre côté.

— L'effet « plus petit quand c'est loin » concerne la perspective (le dessin d'un paysage), pas la symétrie.

Réponse. Non : l'image a toujours les mêmes dimensions.

Correction de l'exercice 11 – Un point sur un cercle

Le cercle C' a pour centre O' et pour rayon 2 cm.

— $OM = 2$ cm, car M est sur C.

— La symétrie conserve les longueurs : $O'M' = OM = 2$ cm.

$$O'M' = 2 \text{ cm} = r'$$

— Donc M' est à 2 cm de O' : il est sur C'. L'image d'un point du cercle est un point du cercle image.

Réponse. Oui, car $O'M' = OM = 2$ cm.

Correction de l'exercice 12 – Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : les angles, dont l'angle droit, sont conservés.

b) **Vrai** : les aires sont conservées.

c) **Faux** : la figure est retournée, le sens est inversé.

d) **Vrai** : les milieux sont conservés.

$$A' = A = 20 \text{ cm}^2$$

Réponse. a) vrai · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 13 – L'axe d'un segment

P est sur l'axe : $P' = P$. Le segment $[PA]$ a donc pour image $[PA']$, de même longueur.

$$PA' = PA = 4 \text{ cm}$$

— Tout point de l'axe est à **égale distance** de A et de A'.

— Cette droite, perpendiculaire à $[AA']$ en son milieu, s'appelle la **médiatrice** du segment $[AA']$ (vocabulaire de 6^e).

Réponse. $PA' = 4$ cm ; tous les points de (d) sont équidistants de A et A'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – La maison symétrique

Par la symétrie d’axe (d) : $A \to E$, $B \to D$, $C \to C$.

— $[AB]$ a pour image $[ED]$: $ED = AB = 4$ m.

— $[BC]$ a pour image $[DC]$: $DC = BC = 3{,}5$ m.

$$P = 6 + 4 + 3{,}5 + 3{,}5 + 4 = 21 \text{ m}$$

— La symétrie permet de connaître toute la façade à partir de sa moitié.

Réponse. $ED = 4$ m ; $DC = 3{,}5$ m ; $P = 21$ m.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : ce qui change et ce qui ne change pas

a) Les longueurs sont conservées : $A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = 5$ cm, donc $A'B'C'D'$ est un **losange**. Les angles aussi : $D'\hat{A}'B' = 60°$.

b) Périmètre :

$$P' = 4 \times 5 = 20 \text{ cm}$$

c) Seuls la **position** (de l’autre côté de l’axe) et le **sens de parcours** (retourné) ont changé.

Réponse. a) losange de côté 5 cm, angle 60° · b) 20 cm · c) position et sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).