

## Plaquette 3 – Endomorphismes remarquables

### Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Projecteur** :  $p^2 = p \Leftrightarrow E = \text{Im } p \oplus \ker p$  et  $p$  vaut l'identité sur  $\text{Im } p$ . Alors  $\text{tr } p = \text{rg } p$ .

**Symétrie** :  $s^2 = \text{id} \Leftrightarrow E = \ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id})$  ;  $s = 2p - \text{id}$  où  $p$  est le projecteur associé.

$$p^2 = p, \quad s = 2p - \text{id}, \quad x = p(x) + (x - p(x))$$

— **Homothétie** : si  $f(x) \in \text{Vect}(x)$  pour tout  $x$ , alors  $f = \lambda \text{id}$ .

— **Nilpotent** :  $f^n = 0$  et  $f^{n-1}(x_0) \neq 0$  en dimension  $n \Rightarrow (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  base.

— **Sous-espace stable** :  $f(F) \subset F$  ; si  $fg = gf$ , alors  $\ker g$  et  $\text{Im } g$  sont stables par  $f$ .

— **Lemme des noyaux** (cas simple) : si  $(f - a \text{id})(f - b \text{id}) = 0$  avec  $a \neq b$ , alors  $E = \ker(f - a \text{id}) \oplus \ker(f - b \text{id})$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Projection oblique dans $\mathbb{R}^3$

a)  $(1, 0, 0) \notin H$  ( $1 \neq 0$ ) donc  $H \cap D = \{0\}$  ;  $2 + 1 = 3$ .

b)  $x = (x, y, z) = h + \lambda(1, 0, 0)$  avec  $h \in H$  :  $(x - \lambda) + y + z = 0$ , d'où  $\lambda = x + y + z$ .

$$p(x, y, z) = (-y - z, y, z), \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)  $p(p(x, y, z)) = p(-y - z, y, z) = (-y - z, y, z) \checkmark$  ;  $\text{tr } P = 2 = \dim H = \text{rg } P \checkmark$

$$\text{d) } S = 2P - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

—  $s(1, 1, 1) = (-5, 1, 1)$ , puis  $s(-5, 1, 1) = (5 - 2 - 2, 1, 1) = (1, 1, 1) \checkmark$  (involution).

**Réponse.**  $p(x, y, z) = (-y - z, y, z)$ ,  $\text{tr } P = \text{rg } P = 2$  ;  $S = 2P - I$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Symétrie et décomposition

a)  $s\left(\frac{x + s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) + x}{2}$  : dans  $\ker(s - \text{id})$ .  $s\left(\frac{x - s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) - x}{2}$  : dans  $\ker(s + \text{id})$ .

b) a) donne  $E = \ker(s - \text{id}) + \ker(s + \text{id})$  ; si  $x$  est dans les deux,  $x = s(x) = -x$ , donc  $x = 0$ .

$$E = \ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id})$$

c)  $\ker(s - \text{id}) = S_n$  (symétriques),  $\ker(s + \text{id}) = A_n$  (antisymétriques) : on retrouve  $M_n = S_n \oplus A_n$ .

d) Dans une base adaptée, la matrice de  $s$  est  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  :

$$\text{— trs} = \dim S_n - \dim A_n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$$

**Réponse.**  $E = \ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id})$  ; transposition :  $S_n \oplus A_n$ , trace  $n$ .

### Correction de l'exercice 3 - Les homothéties

**a)**  $f(x) \in \text{Vect}(x)$  et  $x \neq 0$  :  $f(x) = \lambda_x x$ , avec  $\lambda_x$  unique (si  $\lambda x = \mu x$ , alors  $(\lambda - \mu)x = 0$ ).

**b)**  $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$  et  $f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ . Par liberté de  $(x, y)$  :

$$\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$$

**c)** Si  $y = \mu x$  ( $\mu \neq 0$ ) :  $f(y) = \mu f(x) = \lambda_x y$ , donc  $\lambda_y = \lambda_x$ . Ainsi  $\lambda_x = \lambda$  ne dépend pas de  $x$  :  $f = \lambda \text{id}$ .

**d)** Laisser stable chaque droite  $\text{Vect}(x)$ , c'est  $f(x) \in \text{Vect}(x)$  pour tout  $x$  : ce sont les **homothéties**  $\lambda \text{id}$ . En matrices : seules les matrices scalaires.

**Réponse.**  $f(x) \in \text{Vect}(x)$  pour tout  $x \Rightarrow f = \lambda \text{id}$ .

### Correction de l'exercice 4 - Endomorphisme nilpotent d'indice maximal

**a)** Relation  $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$ . On applique  $f^{n-1}$  : tous les termes  $k \geq 1$  deviennent  $f^{n-1+k}(x_0) = 0$ , reste  $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0$ , donc  $\lambda_0 = 0$ . On applique ensuite  $f^{n-2}$  :  $\lambda_1 = 0$ , etc.

**b)**  $n$  vecteurs libres en dimension  $n$  : base. Dans cette base,  $f$  envoie chaque vecteur sur le suivant et le dernier sur 0 :

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (n = 4)$$

— En général : des 1 juste sous la diagonale, des 0 ailleurs.

**c)**  $D$  baisse le degré :  $D^4 = 0$  sur  $\mathbb{R}_3[X]$ ,  $D^3(X^3) = 6 \neq 0$ .  $x_0 = X^3$  : base  $(X^3, 3X^2, 6X, 6)$ .

**d)** Dans la base,  $f^k$  décale de  $k$  crans :  $\text{rg} f^k = n - k$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

**Réponse.**  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  base ; matrice « sous-diagonale de 1 » ;  $\text{rg} f^k = n - k$ .

### Correction de l'exercice 5 - Sous-espaces stables

**a)** Si  $g(x) = 0$  :  $g(f(x)) = f(g(x)) = 0$ , donc  $f(x) \in \ker g$ . Si  $y = g(x)$  :  $f(y) = g(f(x)) \in \text{Im} g$ .

**b)**  $\deg P' \leq \deg P - 1$  :  $D(\mathbb{R}_k[X]) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X] \subset \mathbb{R}_k[X]$  ✓ (et  $\mathbb{R}_k[X] = \ker D^{k+1}$ , stable par  $a$ ) car  $D$  commute avec  $D^{k+1}$ .

**c)** Une droite stable  $\text{Vect}(u)$  donnerait  $r(u) = \lambda u$  ; mais  $r$  conserve la norme et change la direction de  $u$  d'un angle  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$  :  $r(u)$  n'est pas colinéaire à  $u$ . Aucune droite stable.

$$\det(R(\theta) - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 > 0 \quad (\theta \notin \pi\mathbb{Z})$$

— (Discriminant  $4 \cos^2 \theta - 4 < 0$  : pas de valeur propre réelle.)

**d)**  $f|_F : F \rightarrow F$  est injective (car  $f$  l'est), donc bijective en dimension finie : pour  $y \in F$ ,  $f^{-1}(y) \in F$ .

**Réponse.** Commutation  $\Rightarrow \ker g$ ,  $\text{Im} g$  stables ;  $\mathbb{R}_k[X]$  stables par  $D$  ; rotation d'angle  $\notin \pi\mathbb{Z}$  : aucune droite stable.

### Correction de l'exercice 6 - Lemme des noyaux

**a)**  $(f - \text{id})(2x - f(x)) = 2f(x) - f^2(x) - 2x + f(x) = -(f^2 - 3f + 2 \text{id})(x) = 0$  ✓ ; de même  $(f - 2 \text{id})(f(x) - x) = (f^2 - 3f + 2 \text{id})(x) = 0$  ✓

**b)**  $a)$  donne la somme. Si  $x$  est dans les deux noyaux :  $f(x) = x = 2x$ , donc  $x = 0$ .

$$E = \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f - 2\text{id})$$

c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \checkmark \ker(f - \text{id}) : y = 0, \text{Vect}(1, 0) ; \ker(f - 2\text{id}) : -x + y = 0, \text{Vect}(1, 1).$

d) Dans la base  $((1, 0), (1, 1)) : \text{diag}(1, 2)$ . Donc  $f^n = PD^nP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  :

—  $\text{Mat}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$  (même résultat que par le reste de  $X^n$  modulo  $(X - 1)(X - 2)$ , plaquette des polynômes).

**Réponse.**  $E = \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f - 2\text{id})$  ; en c)  $\text{Vect}(1, 0)$  et  $\text{Vect}(1, 1)$  ;  $f^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 7 - Translation des polynômes

a) Linéaire ;  $P \mapsto P(X - 1)$  est l'inverse :  $T^{-1}(P) = P(X - 1)$ .

b)  $T(X^k) = (X + 1)^k = \sum_j \binom{k}{j} X^j$  :

$$\text{Mat}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— (Triangle de Pascal en colonnes.)

c)  $T^{-1}(X^k) = (X - 1)^k$  : même matrice avec des signes alternés,  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

— Ligne 1 de  $T$  fois colonne 4 de  $T^{-1}$  :  $-1 + 3 - 3 + 1 = 0 \checkmark$  ; ligne 2,  $(0, 1, 2, 3)$ , fois colonne 3,  $(1, -2, 1, 0)$  :  $0 - 2 + 2 + 0 = 0 \checkmark$

d)  $\Delta$  baisse le degré de 1 :  $\Delta^4 = 0$  et  $\Delta^3(X^3) = 6 \neq 0$  : nilpotent d'indice 4. Sa matrice est celle de  $T$  moins  $I_4$ , strictement triangulaire.

**Réponse.**  $T^{-1}(P) = P(X - 1)$  ; matrices de Pascal (signes alternés pour l'inverse) ;  $\Delta = T - \text{id}$  nilpotent d'indice 4.

### Correction de l'exercice 8 - Trace d'un projecteur

a) Base  $(u_1, \dots, u_r)$  de  $\text{Im } p$  complétée par une base de  $\ker p$  :  $p(u_i) = u_i$ ,  $p(v_j) = 0$ .

$$\text{Mat}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La trace ne dépend pas de la base :  $\text{tr } p = r = \text{rg } p$ .

c)  $A = I_3 - \frac{1}{3}J$  avec  $J^2 = 3J$  :  $A^2 = I - \frac{2}{3}J + \frac{1}{9} \times 3J = I - \frac{1}{3}J = A \checkmark$  Projecteur.  
 $\text{rg } A = \text{tr } A = \frac{2+2+2}{3} = 2$ .

— (C'est la projection orthogonale sur le plan  $x + y + z = 0$ .)

d) Non : la trace d'un projecteur est un **entier** (son rang).

**Réponse.**  $\text{tr } p = \text{rg } p$  ;  $A = I - \frac{1}{3}J$  projecteur de rang 2 ; pas de projecteur de trace  $\frac{3}{2}$ .

### Correction de l'exercice 9 - Endomorphisme de carré $-id$

**a)**  $\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-id) = (-1)^n$ . Un carré de réel est positif :  $(-1)^n \geq 0$ , donc  $n$  **pair**.

**b)** La rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  :  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2$  ✓

**c)** Si  $f(x) = \lambda x$ , alors  $f^2(x) = \lambda^2 x = -x$ , donc  $\lambda^2 = -1$  : impossible dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $f(x)$  n'est pas colinéaire à  $x$ .

**d)**  $f(x) = f(x)$  (coordonnées  $(0, 1)$ ) et  $f(f(x)) = -x$  (coordonnées  $(-1, 0)$ ) : colonnes  $(0, 1)$  et  $(-1, 0)$ .

$$\text{Mat}_{(x, f(x))}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— C'est la multiplication par  $i$  dans  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  :  $f$  munit  $\mathbb{R}^n$  d'une structure d'espace vectoriel **complexe** (d'où  $n$  pair).

**Réponse.**  $n$  pair ; exemple rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  ; matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  = multiplication par  $i$ .

### Correction de l'exercice 10 - Somme de deux projecteurs

**a)**  $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + 0 + 0 + q = p + q$ .

**b)**  $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im} p + \text{Im} q$ . Réciproquement, si  $y = p(a) + q(b)$ , alors  $(p + q)(y) = p(a) + q(b) = y$  (car  $p^2 = p$ ,  $qp = 0$ , etc.) :  $y \in \text{Im}(p + q)$ . Somme directe : si  $y = p(a) = q(b)$ , alors  $y = p(y) = pq(b) = 0$ .

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im} p \oplus \text{Im} q$$

**c)**  $p = \text{diag}(1, 0, 0)$ ,  $q = \text{diag}(0, 1, 0)$  :  $pq = qp = 0$ ,  $p + q = \text{diag}(1, 1, 0)$ , projecteur sur  $\text{Vect}(e_1, e_2)$  ✓

**d)**  $p = q = \text{id}$  :  $(p + q)^2 = 4 \text{id} \neq 2 \text{id}$ . L'hypothèse  $pq = qp = 0$  est indispensable.

**Réponse.**  $pq = qp = 0 \Rightarrow p + q$  projecteur,  $\text{Im}(p + q) = \text{Im} p \oplus \text{Im} q$ .

### Correction de l'exercice 11 - Opérateur de décalage

**a)** Linéarité évidente. Surjective :  $v = S(u)$  avec  $u = (0, v_0, v_1, \dots)$ .  $\ker S$  :  $u_{n+1} = 0$  pour tout  $n$ , soit les suites nulles à partir du rang 1 :  $\ker S = \text{Vect}((1, 0, 0, \dots))$ . Non injective.

**b)**  $(S^2 - S - \text{id})(u)_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$  : nul pour tout  $n$  exactement pour les suites de type Fibonacci.

$$\{\text{Fibonacci}\} = \ker(S^2 - S - \text{id})$$

**c)**  $S(u) = ru \Leftrightarrow u_{n+1} = ru_n$  pour tout  $n \Leftrightarrow u_n = u_0 r^n$  : suites géométriques de raison  $r$ .

**d)**  $(S^2 - S - \text{id})(r^n) = (r^2 - r - 1)(r^n) = 0$ . Les racines  $\varphi, \psi$  fournissent la base de la plaquette 1 des espaces vectoriels : la théorie des récurrences linéaires est de l'**algèbre linéaire** sur l'opérateur  $S$ .

**Réponse.**  $S$  surjective,  $\ker S = \text{Vect}(1, 0, 0, \dots)$  ; récurrence de Fibonacci =  $\ker(S^2 - S - \text{id})$  ;  $(r^n)$  vecteur propre.

### Correction de l'exercice 12 - Endomorphisme commutant avec un projecteur

**a)** Sens direct : exercice « Sous-espaces stables » a) (appliqué à  $g = p$ ). Réciproque : si  $x = y + z$  ( $y \in \text{Imp}$ ,  $z \in \ker p$ ),  $f(y) \in \text{Imp}$  et  $f(z) \in \ker p$ , donc  $p(f(x)) = f(y)$  et  $f(p(x)) = f(y)$ .

**b)** Stabilité des deux sous-espaces : matrice **diagonale par blocs**.

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

**c)** Blocs de tailles 2 et 1 :  $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ .

**d)**  $4 + 1 = 5$  (même résultat que le commutant de  $\text{diag}(1, 1, 2)$ ).

**Réponse.**  $fp = pf \Rightarrow \text{Imp}$  et  $\ker p$  stables ; matrice diagonale par blocs ; dimension 5 en c).

### Correction de l'exercice 13 - Rotations et absence de vecteur propre

**a)** Il faut  $\det(R(\theta) - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$  avec  $\lambda$  réel : discriminant  $4(\cos^2 \theta - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \pm 1 \Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}$ .

**b)**  $\theta = \pi$  :  $r_\pi = -\text{id}$  (symétrie centrale) ; tout vecteur est propre, valeur  $-1$ .

**c)**  $R(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta \\ \sin \theta - i \cos \theta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \checkmark$  (car  $-ie^{i\theta} = \sin \theta - i \cos \theta$ ). De même  $(1, i)$  pour  $e^{-i\theta}$ .

valeurs propres complexes  $e^{\pm i\theta}$

**d)** Dans  $\mathbb{C}$ , la rotation est  $z \mapsto e^{i\theta}z$  : une **homothétie complexe**. Sur  $\mathbb{R}$ , pas de droite stable ; sur  $\mathbb{C}$ , la rotation se diagonalise.

**Réponse.** Vecteur propre réel  $\Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}$  ; sur  $\mathbb{C}$  : valeurs propres  $e^{\pm i\theta}$ , vecteurs  $(1, \mp i)$ .

### Correction de l'exercice 14 - Projecteur et symétrie sur les fonctions

**a)**  $s(s(f))(x) = s(f)(-x) = f(x)$ .

**b)**  $\ker(s - \text{id}) =$  fonctions **paires**,  $\ker(s + \text{id}) =$  fonctions **impaires** : on retrouve  $P \oplus I$ .

**c)**  $p(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  (partie paire) :  $p(\exp) = \text{ch}$ ,  $p(\sin) = 0$ .

**d)**  $(s(f))'(x) = -f(-x)$ , donc  $D \circ s = -s \circ D$  :  $D$  **anticommute** avec  $s$ .

$$f \text{ paire} \Rightarrow s(f) = f \Rightarrow s(f') = -D(s(f)) = -f'$$

— La dérivée d'une paire est impaire (et inversement).

**Réponse.**  $s^2 = \text{id}$ ,  $\ker(s \mp \text{id}) =$  paires / impaires ;  $p(\exp) = \text{ch}$  ;  $Ds = -sD$ .

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : projection orthogonale sur un plan

**a)**  $u - p(u)$  doit être colinéaire à  $n$  et  $p(u) \in H$  :  $p(u) = u - \lambda n$  avec  $(u - \lambda n) \cdot n = 0$ , soit  $\lambda = \frac{u \cdot n}{3}$ .

$$P = I_3 - \frac{1}{3}J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**b)**  $P^2 = P$  (exercice « Trace d'un projecteur ») ;  $P$  symétrique ;  $\text{tr}P = 2 = \dim H \checkmark$

$$\mathbf{c)} \ S = 2P - I_3 = I_3 - \frac{2}{3}J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

—  $S^2 = I - \frac{4}{3}J + \frac{4}{9}J^2 = I - \frac{4}{3}J + \frac{4}{3}J = I_3 \checkmark$  ;  $S$  symétrique donc  $S^T S = S^2 = I_3$  :  $S$  est **orthogonale** (isométrie).

$$\mathbf{d)} \ p(3, 0, 0) = (3, 0, 0) - 1 \times (1, 1, 1) = (2, -1, -1) \checkmark \ (2 - 1 - 1 = 0).$$

$$s(3, 0, 0) = 2p(u) - u = (1, -2, -2).$$

— **Contrôle** :  $\|s(u)\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 = \|u\| \checkmark$  (la réflexion conserve les longueurs).

**Réponse.**  $P = I - \frac{1}{3}J$ ,  $\text{tr}P = 2$  ;  $S = I - \frac{2}{3}J$  orthogonale ;  $p(3, 0, 0) = (2, -1, -1)$ ,  
 $s(3, 0, 0) = (1, -2, -2)$ .