

Plaquette 4 - Matrices d'applications linéaires et changements de bases

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Matrice $\text{Mat}_{B,C}(f)$: colonne j = coordonnées de $f(e_j)$ dans C . Si X = coordonnées de x , alors $Y = AX$ = coordonnées de $f(x)$.

— **Composition** : $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g)\text{Mat}(f)$ (bases compatibles).

— **Changement de bases** (P : passage dans E , Q : passage dans F) :

$$A' = Q^{-1}AP, \quad \text{et pour un endomorphisme : } A' = P^{-1}AP$$

— $\text{rg}f = \text{rg}A$ quelles que soient les bases ; $\text{tr}f$ et $\det f$ sont définis pour un endomorphisme (invariants de similitude).

— **Forme normale** : f de rang r a, dans des bases adaptées, la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— $\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F$; une **forme linéaire** a pour matrice une **ligne**.

Correction de l'exercice 1 - Matrice entre deux espaces différents

a) Linéarité : évaluation et dérivation linéaires. Colonnes : $f(1) = (1, 0)$, $f(X) = (0, 1)$, $f(X^2) = (0, 2)$ (car $(X^2)' = 2X$ vaut 2 en 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Deux lignes non colinéaires : $\text{rg}f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$: **surjective**.

c) $AX = 0$: $a = 0$ et $b + 2c = 0$: $P = c(X^2 - 2X)$. $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$ (dimension $3 - 2 = 1$ ✓). **Vérification** : $P(0) = 0$, $P(1) = 2 - 2 = 0$ ✓

d) Nouvelles images : $f(1) = (1, 0)$, $f(X - 1) = (-1, 1)$, $f((X - 1)^2) = (1, 0)$ (dérivée $2(X - 1)$ nulle en 1).

— $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c'est AP avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (changement de base au départ seulement) ✓

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, surjective, $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$; $A' = AP$.

Correction de l'exercice 2 - Composer, c'est multiplier

a) $g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f \circ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: les deux ont un sens.

b) $\text{Mat}(g \circ f) = GF$ et $\text{Mat}(f \circ g) = FG$:

$$GF = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\text{rg}f = \text{rg}g = 2$. GF : lignes proportionnelles, rang 1. $FG : L_3 = L_1 - 2L_2$, rang 2.

— $1 \leq 2$ et $2 \leq 2$ ✓

d) Non : $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg} f \leq 2 < 3$. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui se factorise par $\mathbb{R}^2$ n'est jamais bijectif.

Réponse. $GF = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (rang 1), FG de rang 2 ; $f \circ g$ jamais bijectif.

Correction de l'exercice 3 - Forme normale de rang

a) Lignes proportionnelles : rang 1. $\ker f : x + 2y = 0$, $\text{Vect}(-2, 1)$; $\text{Im} f = \text{Vect}(1, 2)$.

b) $u_2 = (-2, 1)$; (u_1, u_2) non colinéaires : base. $f(u_1) = (1, 2)$ et $w = (0, 1)$: non colinéaires, base.

c) $f(u_1) = 1 \cdot f(u_1) + 0 \cdot w$ et $f(u_2) = 0$: colonnes $(1, 0)$ et $(0, 0)$.

— $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, et le calcul exact donne $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

d) On complète une base de $\ker f$ par des vecteurs $u_1, \dots, u_r$ au départ ; leurs images forment une base de $\text{Im} f$, qu'on complète à l'arrivée. Dans ces bases :

$$\text{Mat}(f) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Deux matrices de même taille sont **équivalentes** si et seulement si elles ont le **même rang**.

Réponse. $\text{rg} f = 1$; dans B', C' : matrice J_1 ; toute matrice de rang r est équivalente à J_r .

Correction de l'exercice 4 - Dimension de $L(E, F)$

a) Linéaire : $\text{Mat}(\lambda f + g) = \lambda \text{Mat}(f) + \text{Mat}(g)$. Bijective : une application linéaire est déterminée par les images de la base (colonnes), qu'on peut choisir librement.

b) $\dim L(E, F) = \dim M_{n,p} = np$.

$$\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F$$

c) Formes linéaires : $L(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$, dimension $4 \times 1 = 4$.

d) $\varepsilon_i : P \mapsto P(a_i)$ pour $a_i = 0, 1, 2, 3$. Libres : si $\sum \lambda_i \varepsilon_i = 0$, on applique aux polynômes de Lagrange L_j (valant 1 en a_j , 0 ailleurs) : $\lambda_j = 0$. Quatre formes libres en dimension 4 : **base**.

Réponse. $\dim L(E, F) = pn$; formes linéaires sur $\mathbb{R}_3[X]$: dimension 4, base $(P \mapsto P(i))_{0 \leq i \leq 3}$.

Correction de l'exercice 5 - Dérivation dans une base adaptée

a) $D(X^k) = kX^{k-1} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $D\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$: chaque vecteur de base est envoyé sur le **précédent**.

$$\text{Mat}_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $P = \text{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ et $P^{-1}AP$ redonne b) : par exemple, coefficient $(2, 3) : \frac{1}{1} \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$

✓

d) D^k décale de k crans vers le haut (des 1 sur la k -ième sur-diagonale) ; pour $k = 4$ il n'y a plus de place : $D^4 = 0$.

— **Intérêt** : un bon choix de base rend la matrice **aussi simple que possible** (ici, une matrice de décalage).

Réponse. Dans $(1, X, X^2/2, X^3/6)$: matrice de décalage (des 1 sur la sur-diagonale) ; $D^4 = 0$.

Correction de l'exercice 6 - Translation dans la base binomiale

a) Degrés échelonnés $0, 1, 2, 3$: base.

b) Pour $X = n$ entier, $B_k(n) = \binom{n}{k}$, et $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (Pascal). Les deux membres sont des polynômes égaux en une infinité de points : ils sont égaux.

$$B_k(X+1) = B_k + B_{k-1}$$

c) $T(B_0) = B_0$, $T(B_k) = B_{k-1} + B_k$:

— $\text{Mat}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}(\Delta)$ est la matrice de décalage (des 1 sur la sur-diagonale).

d) Dans la base canonique, la matrice de T contient **tout** le triangle de Pascal (plaquette 3) ; dans la base binomiale, seulement deux diagonales. C'est pourquoi les B_k sont la base naturelle du **calcul des différences finies** (analogue discret de $\frac{X^k}{k!}$ pour la dérivation).

Réponse. $B_k(X+1) = B_k + B_{k-1}$; $\text{Mat}(T) = I + N$ (décalage) dans la base binomiale.

Correction de l'exercice 7 - Endomorphisme donné dans une autre base

a) Colonnes = coordonnées de $f(u)$ et $f(v)$ dans (u, v) :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (colonnes u, v) et $M = PBP^{-1}$. Calcul exact :

$$\text{— } M = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

c) $M(1, 1) = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = (2, 2) = 2u$ ✓ ; $M(1, -1) = (3, -1) = (1, 1) + (2, -2) = u + 2v$ ✓

d) Sur B : $\text{tr} = 4$, $\det = 4$. Sur M : $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ ✓ ; $\frac{15}{4} + \frac{1}{4} = 4$ ✓

— Trace et déterminant sont des invariants de l'**endomorphisme**, pas de la matrice choisie.

Réponse. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\text{tr} = \det = 4$.

Correction de l'exercice 8 - Déterminant d'un endomorphisme de polynômes

a) $f(1) = 1$, $f(X) = X + 1$, $f(X^2) = X^2 + 2X$:

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Triangulaire de diagonale 1, 1, 1 : $\text{tr}f = 3$, $\det f = 1 \neq 0$: **bijectif**.

c) $f = \text{id} + D$ avec $D^3 = 0$ sur $\mathbb{R}_2[X]$: $(\text{id} + D)(\text{id} - D + D^2) = \text{id} + D^3 = \text{id}$.

— $f^{-1}(X^2) = X^2 - 2X + 2$.

d) $f(X^2 - 2X + 2) = X^2 - 2X + 2 + 2X - 2 = X^2 \checkmark$

— **Lien** : c'est la résolution de l'équation différentielle $y + y' = x^2$ par une solution **polynomiale**.

Réponse. $\text{tr}f = 3$, $\det f = 1$; $f^{-1} = \text{id} - D + D^2$, $f^{-1}(X^2) = X^2 - 2X + 2$.

Correction de l'exercice 9 - Endomorphisme de l'espace des matrices

a) La transposition est linéaire.

b) $\Phi(E_{11}) = 0$, $\Phi(E_{12}) = E_{12} - E_{21}$, $\Phi(E_{21}) = E_{21} - E_{12}$, $\Phi(E_{22}) = 0$:

$$\text{Mat}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\ker \Phi =$ matrices **symétriques** (dimension 3) ; $\text{Im} \Phi =$ matrices **antisymétriques** $\text{Vect}(E_{12} - E_{21})$ (dimension 1). $3 + 1 = 4 \checkmark$

d) $\Phi^2(M) = \Phi(M - M^T) = (M - M^T) - (M^T - M) = 2\Phi(M)$. Donc $\left(\frac{1}{2}\Phi\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\Phi = \frac{1}{2}\Phi$: projecteur sur les antisymétriques, parallèlement aux symétriques.

Réponse. $\ker \Phi =$ symétriques, $\text{Im} \Phi =$ antisymétriques ; $\Phi^2 = 2\Phi$, $\frac{1}{2}\Phi$ projecteur.

Correction de l'exercice 10 - Forme linéaire intégrale

a) $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = \frac{1}{2}$, $\varphi(X^2) = \frac{1}{3}$: matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b) Forme non nulle : $\ker \varphi$ hyperplan, dimension 2. Base : $X - \frac{1}{2}$ et $X^2 - \frac{1}{3}$ (chacun d'intégrale nulle, degrés différents).

c) On cherche $\varphi = \alpha\varepsilon_0 + \beta\varepsilon_{1/2} + \gamma\varepsilon_1$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \frac{1}{2}\beta + \gamma = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\beta + \gamma = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \gamma = \frac{1}{6}, \beta = \frac{4}{6}$$

— (Différence des deux dernières : $\frac{1}{4}\beta = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{2}{3}$; puis $\gamma = \frac{1}{6}$, $\alpha = \frac{1}{6}$.)

d) $\int_0^1 P = \frac{1}{6} \left(P(0) + 4P\left(\frac{1}{2}\right) + P(1) \right)$: la **formule de Simpson**, exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ (et même $\mathbb{R}_3[X]$, plaquette des polynômes).

Réponse. Matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\ker \varphi = \text{Vect}(X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{3})$; $\varphi = \frac{1}{6}(\varepsilon_0 + 4\varepsilon_{1/2} + \varepsilon_1)$ (Simpson).

Correction de l'exercice 11 - Rotation dans une base non orthonormée

a) $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $r(e_1) = e_2 = -e_1 + (e_1 + e_2)$: coordonnées $(-1, 1)$.

$r(e_1 + e_2) = e_2 - e_1 = -2e_1 + (e_1 + e_2)$: coordonnées $(-2, 1)$.

$$R' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; le calcul exact de $P^{-1}RP$ donne bien R' ✓

d) Non : R' n'est pas orthogonale (ses colonnes ne sont pas unitaires). Sont conservés : $\text{tr} R' = 0 = \text{tr} R$, $\det R' = -1 + 2 = 1 = \det R$, et $R'^2 = -I_2$ (propriété de r). La « forme » de la matrice dépend de la base ; ses invariants, non.

Réponse. $R' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: même trace (0) et déterminant (1), $R'^2 = -I$.

Correction de l'exercice 12 - Endomorphisme inversible par sa matrice

a) $g(1) = 1$, $g(X) = X - 1$, $g(X^2) = X^2 - 2X$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Remontées (calcul exact) : $G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $(\text{id} + D + D^2)(X^2) = X^2 + 2X + 2$: troisième colonne $(2, 2, 1)$ ✓ ; $(\text{id} + D + D^2)(X) = X + 1$: colonne $(1, 1, 0)$ ✓ En effet $(\text{id} - D)(\text{id} + D + D^2) = \text{id} - D^3 = \text{id}$.

d) $P = g^{-1}(X^2) = X^2 + 2X + 2$ (troisième colonne). **Vérification :**

$$X^2 + 2X + 2 - (2X + 2) = X^2 \quad \checkmark$$

Réponse. $G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = matrice de $\text{id} + D + D^2$; $P = X^2 + 2X + 2$.

Correction de l'exercice 13 - Multiplication à gauche : matrice 4×4

a) L_A agit sur chaque **colonne** de M par A . La base (E_{11}, E_{21}) décrit la première colonne, (E_{12}, E_{22}) la seconde :

$$\text{Mat}(L_A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Déterminant d'une diagonale par blocs : produit des déterminants,
 $(\det A)^2 = (-2)^2 = 4$.

c) $\text{tr} L_A = 2\text{tr} A = 10$.

d) On permute les deux vecteurs du milieu : les blocs se mélangent, la matrice devient

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (même trace et même déterminant). **Leçon** : l'ordre des vecteurs de base compte pour la **forme** de la matrice.

Réponse. $\text{Mat}(L_A) = \text{diag}(A, A)$; $\det L_A = (\det A)^2 = 4$, $\text{tr} L_A = 10$.

Correction de l'exercice 14 - Rang via une matrice quelconque

a) $f(X^k) = (1, (-1)^k) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Deux lignes non colinéaires : rang 2, surjective, $\dim \ker f = 4 - 2 = 2$.

c) $P(1) = P(-1) = 0 \Leftrightarrow (X^2 - 1) \mid P : \ker f = \text{Vect}(X^2 - 1, X^3 - X)$.

d) Images : $f(1) = (1, 1)$, $f(X) = (1, -1)$, $f(X^2 - 1) = 0$, $f(X^3 - X) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— La base est **adaptée au noyau** (ses deux derniers vecteurs) : les colonnes nulles apparaissent directement, le rang se lit sur le bloc 2×2 (déterminant $-2 \neq 0$).

Réponse. Rang 2, $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 1, X^3 - X)$; base adaptée : deux colonnes nulles.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : diagonaliser $P \mapsto (X - 1)P'$

a) $f(1) = 0$, $f(X) = X - 1$, $f(X^2) = 2X(X - 1) = 2X^2 - 2X$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $f((X - 1)^k) = (X - 1) \cdot k(X - 1)^{k-1} = k(X - 1)^k$: chaque vecteur de B' est multiplié par k .

— $D = \text{diag}(0, 1, 2)$.

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (coordonnées de $1, X - 1, X^2 - 2X + 1$). Le calcul exact de $P^{-1}AP$ donne $\text{diag}(0, 1, 2)$ ✓

d) $\ker f = \text{Vect}(1)$ (constantes) ; $\text{Im} f = \text{Vect}(X - 1, (X - 1)^2)$ = polynômes nuls en 1.

— $f^n((X - 1)^k) = k^n(X - 1)^k$: dans B' , $\text{Mat}(f^n) = \text{diag}(0, 1, 2^n)$ (pour $n \geq 1$).

— **Leçon** : la base de Taylor en 1 « diagonalise » f , qui y agit par simple multiplication.

Réponse. $D = \text{diag}(0, 1, 2)$ dans $(1, X - 1, (X - 1)^2)$; $\ker f = \text{constantes}$, $\text{Im} f = \text{polynômes nuls en 1}$.