

Plaquette 1 – Noyau, image, théorème du rang et matrices

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. $f: E \rightarrow F$ est linéaire si $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Alors $f(0_E) = 0_F$.

- **Noyau** : $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$, sous-espace de E .
- **Image** : $\text{Im} f = f(E)$, sous-espace de F , **engendré par les images d'une base** de E .
- **Rang** : $\text{rg} f = \dim \text{Im} f$.

Caractérisations.

- f **injective** $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.
- f **surjective** $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$.
- **Théorème du rang** (avec $\dim E$ finie) :

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rg} f$$
- Si $\dim E = \dim F$ (finie) : injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ bijective.
- Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $n > p$ n'est **jamais** injective ; avec $n < p$, jamais surjective.

Matrices.

- La j -ième **colonne** de $\text{Mat}_{B,C}(f)$ donne les coordonnées de $f(e_j)$ dans C .
- $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g)\text{Mat}(f)$ et $\text{rg} f = \text{rg}(\text{Mat} f)$.
- **Changement de base** (endomorphisme) : $A' = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage.

Projecteurs et symétries.

- p est un **projecteur** si $p \circ p = p$; alors $E = \ker p \oplus \text{Im} p$.
- s est une **symétrie** si $s \circ s = \text{id}$; alors $E = \ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id})$, et $s = 2p - \text{id}$.

Correction de l'exercice 1 - Vérifier la linéarité

- a) **Oui** : chaque composante est une forme linéaire en (x, y) ; la vérification $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ est immédiate.
- b) **Non** : $g(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ — une application linéaire envoie **toujours** 0 sur 0. C'est une application **affine**.
- c) **Non** : $h(2, 0) = (4, 0)$ alors que $2h(1, 0) = (2, 0)$ — l'homogénéité échoue.
- **Critère pratique** : de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, l'application est linéaire **si et seulement si** chaque composante est un polynôme **homogène de degré 1** (sans constante ni puissance).
- **Conséquence** : toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ s'écrit $X \mapsto AX$ pour une unique matrice A .

Réponse. a) oui · b) non (affine) · c) non (terme x^2).

Correction de l'exercice 2 - Noyau et image

Noyau : on résout $x + y = 0$ et $y + z = 0$.

- $x = -y$ et $z = -y$, donc $\ker f = \{(-t, t, -t)\} = \text{Vect}((-1, 1, -1))$, de **dimension 1**.

Image : engendrée par les images de la base canonique.

- $f(1, 0, 0) = (1, 0)$; $f(0, 1, 0) = (1, 1)$; $f(0, 0, 1) = (0, 1)$.
- Les deux premiers sont déjà libres, donc $\text{Im}f = \mathbb{R}^2$: f est **surjective**, de rang 2.
- **Théorème du rang** : $3 = 1 + 2$ ✓
- f n'est **pas injective** (noyau non nul) — inévitable puisque $3 > 2$.
- **Contrôle** : $f(-1, 1, -1) = (-1 + 1, 1 - 1) = (0, 0)$ ✓

Réponse. $\ker f = \text{Vect}(-1, 1, -1)$, $\text{Im}f = \mathbb{R}^2$, et $3 = 1 + 2$.

Correction de l'exercice 3 - Matrice d'une application

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique — chacune donne une **colonne**.

- $f(1, 0, 0) = (2, 1)$;
- $f(0, 1, 0) = (0, 1)$;
- $f(0, 0, 1) = (-1, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Format** : 2 lignes (dimension d'arrivée) et 3 colonnes (dimension de départ) — à ne pas inverser.
- **Vérification** : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ x + y + z \end{pmatrix}$ ✓
- **Rang** : les deux lignes sont non proportionnelles, donc $\text{rg}A = 2$ — l'application est **surjective**.
- **Noyau** : de dimension $3 - 2 = 1$.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 - Théorème du rang

- **Théorème du rang** : $5 = \dim \ker f + 3$, donc $\dim \ker f = 2$.
- **Injectivité** : le noyau est de dimension $2 \neq 0$ — f n'est **pas injective**.
- **Surjectivité** : $\text{rg}f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\text{Im}f = \mathbb{R}^3$ — f est **surjective**.
- **Contrainte de dimension** : le rang est au plus $\min(5, 3) = 3$; ici il est **maximal**.
- **Généralité** : toute application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ a un noyau de dimension ≥ 2 — elle n'est jamais injective.
- **Exemple concret** : la projection $(x_1, \dots, x_5) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ est de rang 3, de noyau $\{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$, de dimension 2 ✓

Réponse. $\dim \ker f = 2$; surjective, non injective.

Correction de l'exercice 5 - Endomorphisme bijectif

- **Matrice** : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $3 - 2 = 1 \neq 0$.
- A est donc **invertible**, et f est **bijective**.
- **Inverse de la matrice** : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- **Expression** : $f^{-1}(x, y) = (x - y, -2x + 3y)$.
- **Vérification** : $f^{-1}(f(x, y)) = ((3x + y) - (2x + y), -2(3x + y) + 3(2x + y)) = (x, y)$ ✓

- **Raccourci** : en dimension **égale** et finie, il suffit de montrer $\ker f = \{0\}$ pour conclure à la bijectivité — pas besoin de vérifier la surjectivité.
- **Contrôle du déterminant** : $\det(A^{-1}) = 3 - 2 = 1 = \frac{1}{\det A}$ ✓

Réponse. $f^{-1}(x, y) = (x - y, -2x + 3y)$.

Correction de l'exercice 6 - Projecteur

- a) $p(p(x, y, z)) = p(x, y, 0) = (x, y, 0) = p(x, y, z)$, donc $p \circ p = p$ ✓
- b) - **Image** : $\text{Im} p = \{(x, y, 0)\}$, le plan $z = 0$, de **dimension 2**.
- **Noyau** : $p(x, y, z) = 0$ impose $x = y = 0$, donc $\ker p = \text{Vect}((0, 0, 1))$, de **dimension 1**.
- **Somme directe** : $2 + 1 = 3$ et l'intersection est nulle, donc $\mathbb{R}^3 = \ker p \oplus \text{Im} p$ ✓
- **Nature géométrique** : p est la **projection sur le plan Oxy parallèlement à l'axe Oz** — ici même **orthogonale**, les deux sous-espaces étant perpendiculaires.
- **Théorème du rang** : $3 = 1 + 2$ ✓
- **Matrice** : $\text{diag}(1, 1, 0)$ — les projecteurs sont exactement les endomorphismes diagonalisables à valeurs propres dans $\{0, 1\}$.

Réponse. b) $\text{Im} p = \text{plan } z = 0$, $\ker p = \text{Vect}(0, 0, 1)$.

Correction de l'exercice 7 - Symétrie

- **Involution** : $s(s(x, y)) = s(y, x) = (x, y)$, donc $s \circ s = \text{id}$ ✓
- **Vecteurs invariants** : $s(u) = u$ donne $y = x$, soit $\ker(s - \text{id}) = \text{Vect}((1, 1))$.
- **Vecteurs changés en leur opposé** : $s(u) = -u$ donne $y = -x$, soit $\ker(s + \text{id}) = \text{Vect}((1, -1))$.
- **Conclusion** : s est la **symétrie par rapport à la droite** $y = x$, parallèlement à $y = -x$ — c'est la symétrie **orthogonale** d'axe la première bissectrice.
- **Somme directe** : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(1, 1) \oplus \text{Vect}(1, -1)$ ✓
- **Lien avec les projecteurs** : $p = \frac{\text{id} + s}{2}$ vérifie $p(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ — c'est la projection sur l'axe ✓
- **Matrice** : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 1 et -1.

Réponse. Symétrie orthogonale d'axe $y = x$, de direction $y = -x$.

Correction de l'exercice 8 - Application linéaire sur les polynômes

- **Linéarité** : $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ ✓
- **Noyau** : $P' = 0$ signifie P **constant**, donc $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$, de dimension 1.
- **Image** : la dérivée d'un polynôme de degré ≤ 2 est de degré ≤ 1 , et tout polynôme de degré ≤ 1 est une dérivée (prendre une primitive). Donc $\text{Im} \varphi = \mathbb{R}_1[X]$, de **dimension 2**.
- **Rang** : 2.
- **Théorème du rang** : $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = 1 + 2$ ✓
- **Matrice** dans la base $(1, X, X^2)$: les images sont 0, 1, $2X$, d'où

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— **Nilpotence** : $\varphi^3 = 0$ — dériver trois fois annule tout polynôme de degré ≤ 2 .

L'application n'est donc **ni injective ni surjective**.

Réponse. $\ker = \text{constantes}$, $\text{Im} = \mathbb{R}_1[X]$, rang 2.

Correction de l'exercice 9 - Composition

— **Matrices** : $A = \text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

— $g \circ f$: la matrice est BA (celle de f , appliquée en premier, est à **droite**).

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

— $f \circ g$: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

— **Les deux diffèrent** : la composition n'est **pas commutative**.

— **Vérifications directes** : $g(f(x, y)) = g(x + y, x - y) = (2x + 2y, 3x - 3y) \checkmark$;
 $f(g(x, y)) = f(2x, 3y) = (2x + 3y, 2x - 3y) \checkmark$

— **Piège** : écrire AB pour $g \circ f$ est l'erreur la plus fréquente — la matrice de la **première** application appliquée est à **droite**.

Réponse. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 - Forme linéaire et hyperplan

— φ est une **forme linéaire non nulle**, donc **surjective** sur $\mathbb{R}$: $\text{rg}\varphi = 1$.

— **Théorème du rang** : $\dim \ker \varphi = 3 - 1 = 2$ — c'est un **plan** (hyperplan de $\mathbb{R}^3$).

— **Résolution** : $x = 2y - 3z$, avec y et z libres.

— $(x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$.

— **Base** : $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ — libre (regarder les deux dernières coordonnées) $\checkmark$

— **Vérifications** : $2 - 2 + 0 = 0 \checkmark$ et $-3 - 0 + 3 = 0 \checkmark$

— **Règle générale** : le noyau d'une forme linéaire non nulle sur un espace de dimension n est un hyperplan, de dimension $n - 1$.

— **Réciproque** : tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire, unique à un scalaire près.

Réponse. Plan de dimension 2, base $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$.

Correction de l'exercice 11 - Rang d'une matrice et application

— **Rang** : $L_2 = 2L_1$, donc $\text{rg}A = 1$.

— **Image** : engendrée par les colonnes, toutes proportionnelles à $(1, 2)$:

$$\text{Im}f = \text{Vect}((1, 2))$$

de dimension 1 — f n'est **pas surjective** sur $\mathbb{R}^2$.

— **Noyau** : le système se réduit à $x + 2y + 3z = 0$, donc $\dim \ker f = 3 - 1 = 2$.

— **Base du noyau** : $((2, -1, 0), (3, 0, -1))$ — on vérifie $2 - 2 = 0 \checkmark$ et $3 - 3 = 0 \checkmark$

— **Théorème du rang** : $3 = 2 + 1 \checkmark$

— **Interprétation** : f « écrase » tout $\mathbb{R}^3$ sur une **droite** de $\mathbb{R}^2$ — une perte d'information considérable.

Réponse. Rang 1 ; $\text{Im}f = \text{Vect}(1, 2)$, $\dim \ker f = 2$.

Correction de l'exercice 12 - Changement de base

- **Matrice de passage** (nouveaux vecteurs en colonnes) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Formule** : $A' = P^{-1}AP$.
- **Calcul de AP** : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- **Puis $P^{-1}(AP)$** : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- **Résultat** : $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ — la matrice est **diagonale** dans cette base.
- **Interprétation** : $(1, 0)$ et $(1, 1)$ sont des **vecteurs propres**, de valeurs propres 2 et 3.
- **Vérification** : $f(1, 1) = (2 + 1, 3) = (3, 3) = 3(1, 1) \checkmark$
- **Invariants** : trace 5 et déterminant 6 dans les deux bases $\checkmark$

Réponse. $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 13 - La trace, forme linéaire

- a) $\text{tr}(\lambda A + B) = \sum (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \text{tr} A + \text{tr} B$; $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$.
- b) Théorème du rang : $\dim \ker \text{tr} + \text{rg}(\text{tr}) = \dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$. Une forme non nulle a pour image $\mathbb{R}$, de dimension 1 :

$$\dim \ker \text{tr} = n^2 - 1$$
- c) $\text{Im} \subset \mathbb{R}$, non nulle, donc égale à $\mathbb{R}$ (seuls sous-espaces de $\mathbb{R}$: $\{0\}$ et $\mathbb{R}$). Antécédent de 5 : $5E_{11}$ ou $\frac{5}{n}I_n$.
- d) Ces matrices sont de trace nulle. Il y en a $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$; elles sont libres (positions distinctes pour les E_{ij} , et les $E_{11} - E_{kk}$ se distinguent par leur coefficient (k, k)). Famille libre de $n^2 - 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n^2 - 1$: base $\checkmark$

Réponse. tr forme linéaire non nulle ; $\dim \ker \text{tr} = n^2 - 1$, $\text{Im} = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 14 - Endomorphisme de carré nul

- a) Si $y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x)) = 0$: $y \in \ker f$.
- b) $\text{rg} f = \dim \text{Im} f \leq \dim \ker f = n - \text{rg} f$, donc

$$2\text{rg} f \leq n \Leftrightarrow \text{rg} f \leq \frac{n}{2}$$
- c) $f(x, y) = (y, 0)$; $f(f(x, y)) = f(y, 0) = (0, 0) \checkmark$ $\ker f = \{y = 0\} = \text{Vect}(e_1)$ et $\text{Im} f = \text{Vect}(e_1)$: ici $\text{Im} f = \ker f$ (cas d'égalité, $\text{rg} f = 1 = \frac{2}{2}$).
- d) Non : $\text{rg} f \leq \frac{3}{2}$, donc $\text{rg} f \leq 1$.

Réponse. $\text{Im} f \subset \ker f$, $\text{rg} f \leq n/2$; en c) $\ker f = \text{Im} f = \text{Vect}(e_1)$; en d) impossible.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète

- a) - **Rang** : toutes les lignes sont identiques, donc $\text{rg} f = 1$.
- **Image** : $\text{Im} f = \text{Vect}((1, 1, 1))$, de dimension 1.
- **Noyau** : le système se réduit à $x + y + z = 0$, donc $\dim \ker f = 2$.

— **Base du noyau** : $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ ✓

— **Théorème du rang** : $3 = 2 + 1$ ✓

b) **Calcul de A^2** . Chaque coefficient du produit vaut $1 + 1 + 1 = 3$, donc

$$A^2 = 3A$$

— **Interprétation** : posons $p = \frac{A}{3}$. Alors $p^2 = \frac{A^2}{9} = \frac{3A}{9} = p$ — c'est un **projecteur**.

— **Nature** : p est la projection sur la droite $\text{Vect}(1, 1, 1)$ parallèlement au plan $x + y + z = 0$; les deux sous-espaces étant orthogonaux, c'est la projection **orthogonale**.

— **Vérification** : $p(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ — c'est bien la projection orthogonale de e_1 sur la droite ✓

— **Conséquence** : $A^n = 3^{n-1}A$ pour $n \geq 1$ ✓

Réponse. a) rang 1 · b) $A^2 = 3A$, et $\frac{A}{3}$ est un projecteur orthogonal.