

Plaquette 2 – Noyau, image et rang dans tous les cadres

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions. $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$ (sous-espace de E) ; $\operatorname{Im} f = f(E)$ (sous-espace de F).

— f **injective** $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$; f **surjective** $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

$$\dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim E \quad (\text{théorème du rang})$$

— **En dimension finie, pour un endomorphisme** : injectif $\Leftrightarrow$ surjectif $\Leftrightarrow$ bijectif (faux en dimension infinie).

— **Composition** : $\ker f \subset \ker(g \circ f)$, $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$, $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

— Une application linéaire est **déterminée** par les images d'une base, qu'on peut choisir librement.

Correction de l'exercice 1 – Noyau et image d'une matrice de rang 2

a) $L_3 = L_1 + L_2$: il reste $x + 2y + z = 0$ et $y + z = 0$. Donc $y = -z$, $x = 2z - z = z$:

$$\ker f = \operatorname{Vect}(1, -1, 1), \quad \dim \ker f = 1$$

— **Vérification** : $1 - 2 + 1 = 0$, $-1 + 1 = 0$, $1 - 3 + 2 = 0$ ✓

b) Théorème du rang : $\operatorname{rg} f = 3 - 1 = 2$. Les deux premières colonnes $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 3)$, non colinéaires, forment une base de $\operatorname{Im} f$.

c) Normale : $(1, 0, 1) \wedge (2, 1, 3) = (-1, -1, 1)$, d'où $\operatorname{Im} f : z = x + y$.

— Troisième colonne $(1, 1, 2)$: $2 = 1 + 1$ ✓ (cohérent : $C_3 = C_2 - C_1$).

d) $(1, -1, 1) \in \operatorname{Im} f$? $1 = 1 - 1 = 0$: non. Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ et $1 + 2 = 3$: $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Réponse. $\ker f = \operatorname{Vect}(1, -1, 1)$, $\operatorname{Im} f : z = x + y$; $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 2 – L'opérateur de différence

a) Linéarité : $(\lambda P + Q)(X + 1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda \Delta P + \Delta Q$. Si $P = aX^d + \dots$ ($a \neq 0$), le terme X^d s'élimine et celui en X^{d-1} vaut $daX^{d-1} \neq 0$.

b) $\Delta P = 0$ impose $\deg P \leq 0$: $\ker \Delta =$ constantes, dimension 1.

c) $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (a)), et par le théorème du rang $\operatorname{rg} \Delta = (n + 1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

d) $X^2 \in \mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Im} \Delta$ (avec $n = 3$) : un tel P existe, unique à une constante près. Calcul (plaquette des polynômes) : $P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$.

— **Intérêt** : la **surjectivité**, prouvée par le théorème du rang **sans calcul**, garantit l'existence de formules pour $\sum k^p$ pour tout p .

Réponse. $\ker \Delta =$ constantes, $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$; $P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$.

Correction de l'exercice 3 - L'opérateur $P \mapsto XP'$

a) $\varphi(X^k) = X \cdot kX^{k-1} = kX^k$: matrice **diagonale** $\text{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$.

b) $\ker \varphi$: coefficient k nul, soit $k = 0$: les **constantes**. $\text{Im} \varphi = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n) =$ polynômes nuls en 0. Contrôle : $1 + n = n + 1$ ✓

c) $(\varphi - \lambda \text{id})(X^k) = (k - \lambda)X^k$: non nul noyau seulement si $\lambda \in \{0, \dots, n\}$, et alors $\ker = \text{Vect}(X^\lambda)$.

$$\ker(\varphi - k \text{id}) = \text{Vect}(X^k)$$

d) $(\varphi - 2 \text{id})(P) = \sum (k - 2)a_k X^k = X^3$: $a_3 = 1$ ($3 - 2 = 1$), $a_0 = a_1 = 0$, et a_2 **quelconque** (coefficient 0).

— Solutions : $P = X^3 + cX^2$, $c \in \mathbb{R}$ (solution particulière + noyau de $\varphi - 2 \text{id}$). **Vérification** : $X(3X^2 + 2cX) - 2X^3 - 2cX^2 = X^3$ ✓

Réponse. Matrice $\text{diag}(0, 1, \dots, n)$; $\ker \varphi = \text{constantes}$; $XP' - 2P = X^3 \Leftrightarrow P = X^3 + cX^2$.

Correction de l'exercice 4 - Évaluation et interpolation

a) Linéarité : évaluation linéaire en chaque point. Si $\psi(P) = 0$, P (degré ≤ 2) a trois racines 0, 1, 2 : $P = 0$. Injective.

b) $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et ψ injective : par le théorème du rang, $\text{rg} \psi = 3$, **bijective**.

c) Colonnes : $\psi(1) = (1, 1, 1)$, $\psi(X) = (0, 1, 2)$, $\psi(X^2) = (0, 1, 4)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det M = 4 - 2 = 2$$

d) On cherche $P = a + bX + cX^2$ avec $a = 1$, $a + b + c = 3$, $a + 2b + 4c = 7$: $b + c = 2$, $2b + 4c = 6$, d'où $c = 1$, $b = 1$.

— $\psi^{-1}(1, 3, 7) = 1 + X + X^2$ (interpolation de Lagrange). **Vérification** : 1, 3, 7 ✓

Réponse. ψ isomorphisme ($\det = 2$) ; $\psi^{-1}(1, 3, 7) = 1 + X + X^2$.

Correction de l'exercice 5 - Multiplication à gauche par une matrice

a) $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN$.

b) Si A est inversible, L_A^{-1} est la réciproque. Si A n'est pas inversible, il existe $X \neq 0$ avec $AX = 0$; la matrice $M = (X \mid 0)$ vérifie $AM = 0$: L_A n'est pas injective.

c) $AM = 0 \Leftrightarrow$ chaque colonne de M est dans $\ker A = \text{Vect}(-2, 1)$ (espaces vectoriels, plaquette 2) : $\dim \ker L_A = 2$.

$$\text{rg} L_A = 4 - 2 = 2$$

d) L_A agit **colonne par colonne** : $\ker L_A \cong (\ker A)^2$, de dimension $2 \dim \ker A = 2(2 - \text{rg} A)$. Donc $\text{rg} L_A = 4 - 2(2 - \text{rg} A) = 2 \text{rg} A$. Ici $2 \times 1 = 2$ ✓

Réponse. L_A bijective $\Leftrightarrow A$ inversible ; en c) $\dim \ker L_A = 2$, $\text{rg} L_A = 2 = 2 \text{rg} A$.

Correction de l'exercice 6 - Rang d'une composée

a) $g(f(x)) \in \text{Im} g$; si $f(x) = 0$, alors $g(f(x)) = g(0) = 0$.

b) Du premier : $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg} g$. Du second et du théorème du rang : $\text{rg}(g \circ f) = \dim E - \dim \ker(g \circ f) \leq \dim E - \dim \ker f = \text{rg} f$.

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

c) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g = 1$, mais $GF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg}(g \circ f) = 0$. L'inégalité peut être **stricte** (f envoie tout sur l'axe Ox , que g écrase).

d) g injective : g restreinte à $\operatorname{Im} f$ est injective, donc $\dim g(\operatorname{Im} f) = \dim \operatorname{Im} f$, et $g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}(g \circ f)$. Composer par une injection (ou une matrice inversible) **ne change pas le rang**.

Réponse. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$, inégalité stricte possible ; égalité si g injective.

Correction de l'exercice 7 - Surjection de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^2$

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: deux lignes non colinéaires, rang 2.

b) $\operatorname{rg} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$: surjective. Théorème du rang : $\dim \ker f = 4 - 2 = 2$.

c) $x + y + z = 0$ et $y = t$; paramètres z, t : $y = t, x = -t - z$:

$$\ker f = \operatorname{Vect}((-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))$$

d) Solution particulière : $t = z = 0, y = 1, x = 2$: $(2, 1, 0, 0)$. Solutions : $(2, 1, 0, 0) + \ker f$, un plan affine de $\mathbb{R}^4$.

— **Vérification** : $f(2, 1, 0, 0) = (3, 1)$ ✓

Réponse. $\operatorname{rg} f = 2$, surjective, $\dim \ker f = 2$; $f^{-1}(3, 1) = (2, 1, 0, 0) + \ker f$.

Correction de l'exercice 8 - Injectif, surjectif en dimension infinie

a) Tout Q a une primitive polynomiale : D surjective. $D(1) = 0$: pas injective.

b) $XP = 0 \Rightarrow P = 0$: injective. 1 n'est pas de la forme XP (tout XP s'annule en 0) : pas surjective.

c) $D \circ M(P) = (XP)' = P + XP'$; $M \circ D(P) = XP'$. Donc

$$D \circ M - M \circ D = \operatorname{id}$$

— Aucune n'est l'identité ; leur « commutateur » est l'identité, ce qui est **impossible** pour des matrices (argument de trace, plaquette de calcul matriciel).

d) En dimension finie, le théorème du rang donne : injectif $\Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = n \Leftrightarrow$ surjectif. En dimension infinie, ce lien disparaît.

Réponse. D surjective non injective ; M injective non surjective ; $DM - MD = \operatorname{id}$.

Correction de l'exercice 9 - Application définie sur une base

a) Une application linéaire est déterminée par les images d'une base, choisies librement (unicité des coordonnées). $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $f(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = (x + 2y, x + 2y + z)$.

c) $\ker f$: $x + 2y = 0$ et $z = 0$: $\ker f = \operatorname{Vect}(-2, 1, 0)$. Rang $3 - 1 = 2$: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

$$\ker f = \operatorname{Vect}(-2, 1, 0), \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$$

d) Par linéarité, $g(1, 1, 0) = g(1, 0, 0) + g(0, 1, 0) = (1, 1) \neq (1, 2)$: **impossible**. On ne peut imposer librement les images que sur une famille **libre**.

Réponse. $f(x, y, z) = (x + 2y, x + 2y + z)$; $\ker f = \operatorname{Vect}(-2, 1, 0)$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$; g n'existe pas.

Correction de l'exercice 10 - Noyau et image en somme directe

a) $\ker f = \text{Vect}(1, -1)$, $\text{Im} f = \text{Vect}(1, 1)$: non colinéaires, intersection nulle, dimensions $1 + 1 = 2$: **supplémentaires**.

b) $\ker g = \text{Vect}(1, 0) = \text{Im} g$: **pas** supplémentaires.

c) Théorème du rang : $\dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim E$. Donc l'intersection nulle suffit.

$$\dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim E$$

d) $\ker f \subset \ker f^2$ toujours. Si l'intersection est nulle et $f^2(x) = 0$: $f(x) \in \ker f \cap \text{Im} f$, donc $f(x) = 0$. Réciproquement, si $\ker f^2 = \ker f$ et $y = f(x) \in \ker f$: $f^2(x) = 0$, donc $x \in \ker f$ et $y = 0$.

— Pour $g : g^2 = 0$, $\ker g^2 = \mathbb{R}^2 \neq \ker g$ ✓ ; pour $f : f^2 = 2f$, $\ker f^2 = \ker f$ ✓

Réponse. $f : \ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}^2$; $g : \ker g = \text{Im} g$; critère $\ker f^2 = \ker f$.

Correction de l'exercice 11 - Application de rang 1

a) $x \mapsto a \cdot x$ est linéaire ; $f(x)$ est un multiple de b , et $f(a) = \|a\|^2 b \neq 0$: $\text{Im} f = \text{Vect}(b)$.

b) $\ker f = \{x : a \cdot x = 0\}$, l'hyperplan orthogonal à a , de dimension $n - 1$. Et $1 + (n - 1) = n$ ✓

c) $f(x) = b(a^\top x)$: matrice $ba^\top$ (colonne fois ligne), de coefficients $b_i a_j$.

$$\text{Mat}(f) = b a^\top$$

d) $f(f(x)) = (a \cdot x)(a \cdot b)b = (a \cdot b)f(x)$: $f^2 = f \Leftrightarrow a \cdot b = 1$ (plaquette de calcul matriciel : projecteur de rang 1).

— C'est alors la projection sur $\text{Vect}(b)$ parallèlement à l'hyperplan $a^\perp$; orthogonale si de plus a et b sont colinéaires ($b = \frac{a}{\|a\|^2}$).

Réponse. $\text{Im} f = \text{Vect}(b)$, $\ker f = a^\perp$; matrice $ba^\top$; $f^2 = f \Leftrightarrow a \cdot b = 1$.

Correction de l'exercice 12 - L'opérateur d'intégration

a) Linéarité de l'intégrale. Si $J(f) = 0$, en dérivant (théorème fondamental) : $f = J(f)' = 0$. Injective.

b) $g = J(f)$ est C^1 avec $g(0) = 0$ et $g' = f$. Réciproquement, si $g \in C^1$ et $g(0) = 0$, alors $g = J(g')$.

$$\text{Im} J = \{g \in C^1([0; 1]) : g(0) = 0\}$$

c) Non : la fonction constante 1 n'est pas dans l'image ($1 \neq 0$ en 0), ni $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ (non dérivable). En dimension finie, un endomorphisme injectif serait surjectif ; ici, non.

d) $J(1) = x$, $J^2(1) = \frac{x^2}{2}$, et par récurrence $J^n(1) = \frac{x^n}{n!} \neq 0$: aucune puissance de J n'est nulle.

Réponse. J injective, $\text{Im} J =$ fonctions C^1 nulles en 0, non surjective ; $J^n(1) = \frac{x^n}{n!}$.

Correction de l'exercice 13 - Noyau d'une famille d'évaluations

a) La restriction de θ à $\mathbb{R}_2[X]$ est bijective (interpolation en trois points distincts) : tout triplet est atteint.

b) Théorème du rang : $\dim \ker \theta = 5 - 3 = 2$.

c) $P \in \ker \theta \Leftrightarrow -1, 0, 1$ racines $\Leftrightarrow (X^3 - X) \mid P : P = (X^3 - X)(\alpha + \beta X)$.

$$\ker \theta = \text{Vect}(X^3 - X, X^4 - X^2)$$

d) Solution particulière dans $\mathbb{R}_2[X] : X^2 (1, 0, 1 \checkmark)$. Ensemble : $X^2 + \alpha(X^3 - X) + \beta(X^4 - X^2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Réponse. θ surjective, $\ker \theta = \text{Vect}(X^3 - X, X^4 - X^2)$; solutions $X^2 + \ker \theta$.

Correction de l'exercice 14 - Image réciproque d'un sous-espace

a) $f(0) = 0 \in G$; si $f(x), f(y) \in G$, alors $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \in G$. Et $\ker f = f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(G)$.

b) $\subset$: évident. $\supset$: si $y \in G \cap \text{Im} f$, $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(G)$.

c) Théorème du rang appliqué à la restriction $f: f^{-1}(G) \rightarrow G$, de noyau $\ker f$ et d'image $G \cap \text{Im} f$:

$$\dim f^{-1}(G) = \dim \ker f + \dim (G \cap \text{Im} f)$$

d) $f(x, y, z) \in \text{Vect}(1, 1) \Leftrightarrow x + y = y + z \Leftrightarrow x = z : f^{-1}(G) = \{x = z\}$, un plan.

— **Contrôle** : $\ker f = \text{Vect}(1, -1, 1)$ (dimension 1), f surjective donc $G \cap \text{Im} f = G$ (dimension 1) : $1 + 1 = 2 \checkmark$

Réponse. $f^{-1}(G)$ sous-espace, $\dim = \dim \ker f + \dim (G \cap \text{Im} f)$; en d) le plan $x = z$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : l'opérateur de Legendre

a) Linéarité : dérivation et multiplication par des polynômes fixes. Calculs :

— $L(1) = 0$; $L(X) = -2X$; $L(X^2) = 2(1 - X^2) - 4X^2 = 2 - 6X^2$;
 $L(X^3) = 6X(1 - X^2) - 6X^3 = 6X - 12X^3$.

b) Colonnes = coordonnées des images :

$$\text{Mat}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

— Triangulaire de diagonale $0, -2, -6, -12$: rang 3, $\ker L = \text{constantes}$ (dimension 1 ; $4 - 3 = 1 \checkmark$).

c) $L\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = 2 - 6X^2 = -6\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) : \lambda = -6$.

$L\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right) = 6X - 12X^3 + \frac{6}{5}X = -12\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right) : \lambda = -12$.

d) Base $\left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}, X^3 - \frac{3}{5}X\right)$ (degrés échelonnés) : L y est diagonale, $\text{diag}(0, -2, -6, -12) = \text{diag}(-k(k+1))$.

— Ce sont (à un facteur près) les **polynômes de Legendre**, déjà rencontrés comme polynômes orthogonaux.

Réponse. $\text{rg} L = 3$, $\ker L = \text{constantes}$; valeurs $-k(k+1)$: base $\left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}, X^3 - \frac{3}{5}X\right)$.