

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse sur les applications linéaires

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Rang. $\dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim E$; une inclusion $F \subset G$ avec $\dim F = \dim G$ (finie) est une égalité.

— **Projecteur** : $p^2 = p \Leftrightarrow E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$ avec $p = \operatorname{id}$ sur $\operatorname{Im} p$; alors $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

— **Polynôme annulateur scindé à racines simples** :

$$(f - a \operatorname{id}) \circ (f - b \operatorname{id}) = 0, a \neq b \Rightarrow E = \ker(f - a \operatorname{id}) \oplus \ker(f - b \operatorname{id})$$

— **Noyaux itérés** : $\ker f \subset \ker f^2 \subset \dots$ et $\operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^2 \supset \dots$

— $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ (dimension finie).

— **Trace** : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, donc $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un projecteur

a) Pour $z = 0$, $A(x, y, 0) = (x, y, 0)$: p agit comme l'identité sur le plan $z = 0$. Or les colonnes de A , $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, sont toutes dans ce plan, donc $A \cdot A = A$ colonne par colonne : $p^2 = p$.

b) $\ker p : x + z = 0, y + z = 0 : \operatorname{Vect}((-1, -1, 1))$. $\operatorname{Im} p$: colonnes $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$: plan $z = 0$.

— $(-1, -1, 1)$ n'est pas dans le plan $z = 0$ et $1 + 2 = 3$: supplémentaires.

c) $\operatorname{tr} p = 2 = \operatorname{rg} p$. **Preuve générale** : dans une base adaptée à $\operatorname{Im} p \oplus \ker p$ (où p vaut id puis 0),

$$\operatorname{Mat}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr} p = r = \operatorname{rg} p$$

d) Projection sur le plan $z = 0$ **parallèlement** à la droite dirigée par $(-1, -1, 1)$ (projection oblique). Dans la base $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, -1, 1))$: $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$.

Réponse. Projecteur sur $\{z = 0\}$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(-1, -1, 1)$; $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p = 2$.

Correction de l'exercice 2 – Polynôme annulateur et puissances

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I_2 \checkmark$

b) $(f - \operatorname{id}) \circ (f - 2 \operatorname{id}) = 0$ et $\operatorname{id} = (2 \operatorname{id} - f) + (f - \operatorname{id})$: tout x s'écrit $x = q(x) + p(x)$ avec $q(x) \in \ker(f - \operatorname{id})$ et $p(x) \in \ker(f - 2 \operatorname{id})$; l'intersection est nulle ($f(x) = x = 2x$ force $x = 0$).

— $\ker(A - I) : 2x - 2y = 0$, base $(1, 1)$; $\ker(A - 2I) : x - 2y = 0$, base $(2, 1)$.

c) $p + q = \operatorname{id}$, $pq = -(f - \operatorname{id})(f - 2 \operatorname{id}) = 0$, donc $p^2 = p(\operatorname{id} - q) = p$: projecteur, de même pour q .

d) $f = 2p + q$ (f vaut 2 sur $\operatorname{Im} p$ et 1 sur $\operatorname{Im} q$), et comme $pq = qp = 0$:

$$f^n = 2^n p + q = 2^n (f - \operatorname{id}) + (2 \operatorname{id} - f) = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\operatorname{id}$$

— $A^5 = 31A - 30I_2 = \begin{pmatrix} 63 & -62 \\ 31 & -30 \end{pmatrix}$ (contrôle : $n = 1$ redonne A , $n = 2$ redonne $3A - 2I$).

Réponse. $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(1, 1) \oplus \text{Vect}(2, 1)$; $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$, $A^5 = \begin{pmatrix} 63 & -62 \\ 31 & -30 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 - Endomorphisme de carré nul

a) Si $y = f(x)$, alors $f(y) = f^2(x) = 0$: $y \in \ker f$.

b) $\text{rg} f \leq \dim \ker f = n - \text{rg} f$, d'où $2\text{rg} f \leq n$.

$$\text{Im} f \subset \ker f \implies \text{rg} f \leq \frac{n}{2}$$

c) $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$, $f(e_3) = 0$, $f(e_4) = e_3$: $f^2 = 0$ et $\text{Im} f = \text{Vect}(e_1, e_3)$.

d) Ici $\text{rg} f = 2 = \dim \ker f$, donc $\text{Im} f = \ker f$. On choisit u_2, u_4 tels que $u_1 = f(u_2)$, $u_3 = f(u_4)$ forment une base de $\text{Im} f$.

— **Liberté** de (u_1, u_2, u_3, u_4) : si $\sum \lambda_i u_i = 0$, on applique f : $\lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_3 = 0$, donc $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$; il reste $\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

— Quatre vecteurs libres : base, et $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$, $f(u_3) = 0$, $f(u_4) = u_3$ donne la matrice annoncée.

Réponse. $\text{Im} f \subset \ker f$, $\text{rg} f \leq n/2$; en dimension 4 et rang 2 : deux blocs de Jordan $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 - Inégalité de Sylvester

a) L'image de $g|_{\text{Im} f}$ est $g(f(E)) = \text{Im}(g \circ f)$ et son noyau est $\ker g \cap \text{Im} f$.

b) Le théorème du rang sur $\text{Im} f$ (dimension $\text{rg} f$) :

$$\text{rg} f = \dim(\ker g \cap \text{Im} f) + \text{rg}(g \circ f)$$

c) $\dim(\ker g \cap \text{Im} f) \leq \dim \ker g = n - \text{rg} g$, d'où $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg} f - (n - \text{rg} g)$.

d) $AB = 0$: $\text{rg}(AB) = 0 \geq \text{rg} A + \text{rg} B - n$.

— **Exemple d'égalité** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $AB = 0$ et $1 + 1 = 2$. On retrouve l'exercice 3 avec $A = B$.

Réponse. $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg} f - \dim(\ker g \cap \text{Im} f) \geq \text{rg} f + \text{rg} g - n$; $AB = 0 \implies \text{rg} A + \text{rg} B \leq n$.

Correction de l'exercice 5 - Noyau et image supplémentaires

a) Le sens $\Leftarrow$ est la définition. $\Rightarrow$: la somme est directe et, par le théorème du rang, $\dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim E$: elle remplit E .

b) Toujours $\ker f \subset \ker f^2$.

— $\Rightarrow$: si $f^2(x) = 0$, alors $f(x) \in \ker f \cap \text{Im} f = \{0\}$, donc $x \in \ker f$.

— $\Leftarrow$: si $y = f(x) \in \ker f$, alors $f^2(x) = 0$, donc $x \in \ker f^2 = \ker f$ et $y = 0$.

c) N : $\ker N = \text{Im} N = \text{Vect}(e_1)$: **échec** (et $N^2 = 0$). A : $\ker A = \text{Vect}(1, -1)$, $\text{Im} A = \text{Vect}(1, 1)$: intersection nulle, $\mathbb{R}^2 = \ker A \oplus \text{Im} A$ ✓ (cohérent : $A^2 = 2A$ et $\ker A^2 = \ker A$).

d) Si $p^2 = p$ et $y = p(x) \in \ker p$: $y = p(x) = p^2(x) = p(y) = 0$.

$$p^2 = p \implies E = \ker p \oplus \text{Im} p$$

Réponse. Les trois conditions sont équivalentes ; échec pour N nilpotente, succès pour A et pour tout projecteur.

Correction de l'exercice 6 - Formes linéaires de même noyau

a) $\text{Im } \varphi$ est un sous-espace non nul de $\mathbb{R}$: c'est $\mathbb{R}$, rang 1, donc $\dim \ker \varphi = n - 1$.

b) $\text{Vect}(a) \cap \ker \varphi = \{0\}$ car $\varphi(ta) = t\varphi(a) = 0 \Rightarrow t = 0$; les dimensions $(n - 1) + 1 = n$ concluent. Explicitement :

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$$

c) $\psi - \lambda\varphi$ est nulle sur $\ker \varphi = \ker \psi$ et en a (par choix de λ) : nulle sur $\ker \varphi \oplus \text{Vect}(a) = E$.

d) Le plan est $\ker \varphi$ pour $\varphi(x, y, z) = x + y - z$. Toute forme nulle sur ce plan a un noyau contenant l'hyperplan : soit elle est nulle, soit son noyau **est** l'hyperplan, et par c) elle vaut $\lambda\varphi$.

— Réponse : les formes $(x, y, z) \mapsto \lambda(x + y - z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$: une **droite** de formes linéaires.

Réponse. $\ker \varphi = \ker \psi \Rightarrow \psi = \lambda\varphi$; formes nulles sur $x + y - z = 0$: $\lambda(x + y - z)$.

Correction de l'exercice 7 - Interpolation de Lagrange par l'algèbre linéaire

a) Évaluations linéaires. Si $\Phi(P) = 0$, P de degré $\leq n$ a $n + 1$ racines distinctes : $P = 0$.

b) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$: injective $\Rightarrow$ bijective.

— **Interprétation** : pour toutes valeurs $y_0, \dots, y_n$, il existe **un unique** polynôme de degré $\leq n$ passant par les points (a_i, y_i) .

c) $P = a + bX + cX^2$: $a = 1$, $a + b + c = 3$, $a + 2b + 4c = 7$, soit $b + c = 2$ et $2b + 4c = 6$, d'où $c = 1$, $b = 1$.

$$P = X^2 + X + 1 \quad (P(0) = 1, P(1) = 3, P(2) = 7 \checkmark)$$

d) $\dim \mathbb{R}_{n+1}[X] = n + 2 > n + 1$: pas injective. $\ker \Phi =$ multiples de $\prod (X - a_i)$ de degré $\leq n + 1$: $\text{Vect}\left(\prod_{i=0}^n (X - a_i)\right)$, dimension 1 (théorème du rang : $n + 2 - (n + 1) \checkmark$).

Réponse. Φ isomorphisme (unicité de l'interpolation) ; $P = X^2 + X + 1$; sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, $\ker \Phi = \text{Vect}\left(\prod (X - a_i)\right)$.

Correction de l'exercice 8 - Dimension infinie : dérivation et intégration

a) Surjective : $Q = \sum b_k X^k$ est la dérivée de $\sum \frac{b_k}{k+1} X^{k+1}$. Pas injective : $D(1) = 0$, $\ker D =$ constantes.

b) Injective : $I(P) = 0 \Rightarrow P = (I(P))' = 0$. Pas surjective : $I(P)$ s'annule en 0, donc $1 \notin \text{Im } I$.

c) $D \circ I = \text{id}$ (théorème fondamental de l'analyse), mais

$$I \circ D(P) = \int_0^X P'(t) dt = P - P(0) \neq P \text{ en général}$$

— D a un inverse à droite I , sans être inversible.

d) En dimension finie, pour $f \in L(E)$: injectif $\Leftrightarrow$ surjectif (théorème du rang). Et $g \circ f = \text{id}$ entraîne f injectif, donc bijectif, donc $g = f^{-1}$ et $f \circ g = \text{id}$. Ici la dimension infinie casse le théorème du rang.

Réponse. D surjective non injective, I injective non surjective ; $D \circ I = \text{id}$, $I \circ D = P \mapsto P - P(0)$.

Correction de l'exercice 9 - Commutant d'une matrice

a) $C(A) = \ker(M \mapsto AM - MA)$, application linéaire.

b) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$; nul ssi $b = c = 0$: **matrices diagonales**, dimension 2.

c) $NM = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $MN = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$: $c = 0$, $d = a$.

$$C(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}(I_2, N)$$

d) I_2 et A commutent avec A : si A n'est pas scalaire, (I_2, A) est libre et $\dim C(A) \geq 2$; si $A = \lambda I_2$, $C(A) = M_2$.

— **Réciproque** : si A commute avec E_{12} et E_{21} , le calcul de b)-c) force A diagonale à coefficients égaux. $C(A) = M_2 \Leftrightarrow A = \lambda I_2$ (les **homothéties**).

Réponse. $C(\text{diag}(1, 2)) = \text{diagonales}$; $C(N) = \text{Vect}(I, N)$; $C(A) = M_2 \Leftrightarrow A$ scalaire.

Correction de l'exercice 10 - Trace et crochet AB – BA

a) $\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA)$.

b) $\text{tr}(AB - BA) = 0$ tandis que $\text{tr} I_n = n \neq 0$.

c) $D(M(P)) = (XP)' = P + XP'$ et $M(D(P)) = XP'$:

$$D \circ M - M \circ D = \text{id}_{\mathbb{R}[X]}$$

d) $\mathbb{R}[X]$ est de **dimension infinie** : D et M n'ont pas de matrice carrée finie, et la trace n'y est pas définie. Si l'on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$, M n'est plus un endomorphisme (XP peut être de degré $n + 1$) : l'argument de trace ne s'applique pas. (C'est la relation de Heisenberg de la mécanique quantique, qui exige la dimension infinie.)

Réponse. $\text{tr}(AB - BA) = 0 \neq n$: impossible en dimension finie ; $DM - MD = \text{id}$ sur $\mathbb{R}[X]$ (dimension infinie).

Correction de l'exercice 11 - Noyaux itérés d'un endomorphisme nilpotent

a) $N^k(e_j) = e_{j-k}$ (nul si $j \leq k$) : $\ker N^k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $\text{rg} N^k = 5 - k$; $N^5 = 0$.

b) $f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0$. Si $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ et $f^{k+2}(x) = 0$: $f(x) \in \ker f^{k+1} = \ker f^k$, donc $f^{k+1}(x) = 0$; ainsi $\ker f^{k+2} = \ker f^{k+1}$, et on itère.

c) Dimensions 1, 2, 3, 4, 5, 5, ... : accroissements 1, 1, 1, 1, 0, ... (décroissants au sens large). En général

$$\dim \ker f^{k+1} - \dim \ker f^k = \dim(\ker f \cap \text{Im} f^k)$$

— qui décroît car $\text{Im} f^k$ décroît (Sylvester, exercice 4, appliqué à f et f^k).

d) Dans la base $\left(1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6}, \frac{X^4}{24}\right)$, D a **exactement** la matrice de N (plaquette 4) : mêmes dimensions ($\ker D^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]$, de dimension k). Les deux endomorphismes sont « le même » à changement de base près.

Réponse. $\ker N^k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, dimensions 1, 2, 3, 4, 5 ; D sur $\mathbb{R}_4[X]$ est semblable à N .

Correction de l'exercice 12 - Endomorphisme de rang 1

a) $f(x) \in \text{Vect}(u) : f(x) = \varphi(x)u$ avec un unique scalaire $\varphi(x)$; la linéarité de f et l'unicité donnent celle de φ .

b) $f^2(x) = \varphi(x)f(u) = \varphi(x)\varphi(u)u = \varphi(u)f(x)$. Dans une base $(u, e_2, \dots)$, seule la première ligne est non nulle, et son premier coefficient est $\varphi(u) : \text{tr}f = \varphi(u)$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi(u) = V^T U = 5 = \text{tr}A$:

$$A^2 = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad A^n = 5^{n-1}A$$

d) Si $t = \text{tr}f \neq 0$: $\left(\frac{f}{t}\right)^2 = \frac{tf}{t^2} = \frac{f}{t} \checkmark$. Si $t = 0$: $f^2 = 0$, par exemple $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (trace nulle, rang 1).

Réponse. $f = \varphi(\cdot)u$, $f^2 = (\text{tr}f)f$; $A^n = 5^{n-1}A$; $f / \text{tr}f$ projecteur si $\text{tr}f \neq 0$, sinon $f^2 = 0$.

Correction de l'exercice 13 - Une équation linéaire matricielle

a) Somme de l'identité et de $M \mapsto \text{tr}(M)I_n$, linéaire.

b) $\Psi(M) = 0 \Rightarrow M = -\text{tr}(M)I_n$; en prenant la trace : $\text{tr}M = -n\text{tr}M$, donc $(n+1)\text{tr}M = 0$, $\text{tr}M = 0$, puis $M = 0$. Endomorphisme injectif en dimension finie : bijectif.

c) Trace : $\text{tr}M + n\text{tr}M = \text{tr}N$, donc $\text{tr}M = \frac{\text{tr}N}{n+1}$ et

$$\Psi^{-1}(N) = N - \frac{\text{tr}N}{n+1}I_n$$

d) $\text{tr}N = 6$, $n+1 = 3$: $M = N - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Vérification** : $\text{tr}M = 2$, $M + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$

Réponse. Ψ bijective, $\Psi^{-1}(N) = N - \frac{\text{tr}N}{n+1}I_n$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 - Opérateur de différence et sommes de puissances

a) Si $P = aX^d + \dots$, le coefficient de X^{d-1} dans ΔP est $da \neq 0$ (binôme). $\Delta P = 0 : P(k) = P(0)$ pour tout entier k , donc $P - P(0)$ a une infinité de racines : P constant.

b) Théorème du rang : $\dim \text{Im} = (n+2) - 1 = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ et $\text{Im} \subset \mathbb{R}_n[X]$: égalité.

c) $\Delta B_{k+1} = B_k$, donc $\Delta(2B_3 + B_2) = 2B_2 + B_1 = X^2$:

$$P = \frac{X(X-1)(X-2)}{3} + \frac{X(X-1)}{2}$$

— $P(0) = 0 \checkmark$; contrôle $\Delta P(2) = P(3) - P(2) = 5 - 1 = 4 = 2^2 \checkmark$

d) Télescopage : $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum (P(k+1) - P(k)) = P(n) - P(0) = P(n)$, et en factorisant :

— $P(n) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. Pour $n = 10$: $\frac{10 \times 9 \times 19}{6} = 285$, et $0 + 1 + 4 + \dots + 81 = 285 \checkmark$

Réponse. Δ surjective de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$; $P = 2B_3 + B_2$; $\sum_{k < n} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la différence seconde

a) $\Phi(1) = 0$, $\Phi(X) = (X+1) + (X-1) - 2X = 0$, $\Phi(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = 2$, $\Phi(X^3) = 6X$ (les termes impairs en 1 se compensent).

b) Pour $P = X^d$: $(X+1)^d + (X-1)^d - 2X^d = 2\binom{d}{2}X^{d-2} + 2\binom{d}{4}X^{d-4} + \dots$: degré $d-2$ exactement ($d \geq 2$). Donc $\Phi(P) = 0 \Leftrightarrow \deg P \leq 1$: $\ker \Phi = \mathbb{R}_1[X]$.

c) $\text{Im} \Phi \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\text{rg} \Phi = (n+1) - 2 = n-1 = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$: égalité.

d) Colonnes $\Phi(1)$, $\Phi(X)$, $\Phi(X^2)$, $\Phi(X^3)$:

$$\text{Mat}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rg} = 2$$

— $\Phi(P) = 6X$: $P = X^3 + aX + b$ (solution particulière + noyau). $P(0) = 0$: $b = 0$; $P(1) = 0$: $a = -1$. $P = X^3 - X$.

— **Vérification** : $\Phi(X^3) - \Phi(X) = 6X$ ✓ et $P(0) = P(1) = 0$ ✓ (analogue discret de $y'' = 6x$).

Réponse. $\ker \Phi = \mathbb{R}_1[X]$, $\text{Im} \Phi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$; sur $\mathbb{R}_3[X]$ rang 2 ; $P = X^3 - X$.