

Plaquette 3 – Endomorphismes remarquables

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Certains endomorphismes se reconnaissent à une **identité algébrique** : $p^2 = p$ (projecteur), $s^2 = \text{id}$ (symétrie), $f^n = 0$ (nilpotent), $f^2 = -\text{id}$. Chaque identité se traduit par une **décomposition de l'espace** en sous-espaces où f agit simplement (identité, zéro, opposé). On étudie aussi les **sous-espaces stables** et l'effet d'une relation polynomiale $P(f) = 0$ (lemme des noyaux), avant d'écrire les matrices dans des bases adaptées.

Exercice 1 – Projection oblique dans $\mathbb{R}^3$

Soient $H: x + y + z = 0$ et $D = \text{Vect}(1, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
- Déterminer l'expression de la projection p sur H parallèlement à D , et sa matrice P .
- Vérifier $P^2 = P$ et $\text{tr}P = \text{rg}P$.
- En déduire la matrice de la symétrie s par rapport à H parallèlement à D et vérifier $s^2 = \text{id}$ sur un vecteur.

Exercice 2 – Symétrie et décomposition

Soit $s \in L(E)$ avec $s^2 = \text{id}$.

- Montrer que $x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$ décompose x selon $\ker(s - \text{id})$ et $\ker(s + \text{id})$.
- En déduire $E = \ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id})$.
- Exemple : s la transposition $M \mapsto M^T$ sur $M_n(\mathbb{R})$. Identifier les deux sous-espaces.
- Calculer trs pour la transposition.

Exercice 3 – Les homothéties

Soit $f \in L(E)$ tel que pour tout x , $f(x)$ soit colinéaire à x .

- Montrer que pour tout $x \neq 0$, il existe un unique λ_x avec $f(x) = \lambda_x x$.
- Soient x, y libres. En calculant $f(x + y)$ de deux façons, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
- Traiter le cas x, y colinéaires et conclure que $f = \lambda \text{id}$.
- Application : déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui laissent **toutes** les droites vectorielles stables.

Exercice 4 – Endomorphisme nilpotent d'indice maximal

Soit $f \in L(E)$, $\dim E = n$, avec $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

- Montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre (appliquer f^{n-1} à une relation, puis

$f^{n-2} \dots$).

- b) En déduire que c'est une base et écrire la matrice de f dans cette base.
- c) Exemple : la dérivation D sur $\mathbb{R}_3[X]$; vérifier $D^4 = 0$, $D^3 \neq 0$, et donner x_0 .
- d) Calculer $\text{rg} f^k$ pour $0 \leq k \leq n$.

Exercice 5 - Sous-espaces stables

- a) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\ker g$ et $\text{Im} g$ sont stables par f .
- b) Déterminer les sous-espaces stables par la dérivation D sur $\mathbb{R}_n[X]$ (on admettra que ce sont exactement les $\mathbb{R}_k[X]$) et vérifier que chaque $\mathbb{R}_k[X]$ est stable.
- c) Soit r la rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'aucune droite n'est stable.
- d) Montrer que si F est stable par f inversible (dimension finie), il est stable par f^{-1} .

Exercice 6 - Lemme des noyaux

Soit $f \in L(E)$ avec $(f - \text{id}) \circ (f - 2 \text{id}) = 0$.

- a) Montrer que $x = (2x - f(x)) + (f(x) - x)$ avec $2x - f(x) \in \ker(f - \text{id})$ et $f(x) - x \in \ker(f - 2 \text{id})$.
- b) En déduire $E = \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f - 2 \text{id})$.
- c) Exemple : f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier la relation, puis déterminer les deux noyaux.
- d) Écrire la matrice de f dans une base adaptée et en déduire f^n .

Exercice 7 - Translation des polynômes

Soit $T: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X + 1)$.

- a) Montrer que T est un automorphisme et donner T^{-1} .
- b) Écrire la matrice de T dans $(1, X, X^2, X^3)$ (coefficients binomiaux).
- c) En déduire la matrice de T^{-1} et vérifier leur produit sur une ligne.
- d) Montrer que $T - \text{id} = \Delta$ (opérateur de différence) est nilpotent et calculer son indice.

Exercice 8 - Trace d'un projecteur

Soit p un projecteur de E ($\dim E = n$).

- a) Écrire la matrice de p dans une base adaptée à $E = \text{Im} p \oplus \ker p$.
- b) En déduire $\text{tr} p = \text{rg} p$.
- c) Application : montrer que la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est un projecteur et donner son rang sans calcul d'échelonnement.
- d) Existe-t-il un projecteur de trace $\frac{3}{2}$?

Exercice 9 – Endomorphisme de carré –id

Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ avec $f \circ f = -\text{id}$.

- En prenant le déterminant, montrer que n est pair.
- Donner un exemple pour $n = 2$.
- Montrer que pour $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est libre.
- Pour $n = 2$, montrer que la matrice de f dans la base $(x, f(x))$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Interpréter ($\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$).

Exercice 10 – Somme de deux projecteurs

Soient p et q deux projecteurs de E avec $p \circ q = q \circ p = 0$.

- Montrer que $p + q$ est un projecteur.
- Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im} p \oplus \text{Im} q$.
- Exemple dans $\mathbb{R}^3$: p projection sur $\text{Vect}(e_1)$ et q sur $\text{Vect}(e_2)$, parallèlement aux plans de coordonnées. Vérifier.
- Donner un exemple où $p + q$ n'est pas un projecteur.

Exercice 11 – Opérateur de décalage

Sur l'espace S des suites réelles, on définit $S(u) = (u_{n+1})_n$ (décalage).

- Montrer que S est linéaire, surjective, non injective ; déterminer $\ker S$.
- Montrer que l'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est $\ker(S^2 - S - \text{id})$.
- Montrer que les suites géométriques (r^n) sont les vecteurs vérifiant $S(u) = ru$ (vecteurs propres de S).
- En déduire, pour r racine de $r^2 = r + 1$, que $(r^n) \in \ker(S^2 - S - \text{id})$.

Exercice 12 – Endomorphisme commutant avec un projecteur

Soit p un projecteur de E et $f \in L(E)$.

- Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\text{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f .
- En déduire la forme de la matrice de f dans une base adaptée à $E = \text{Im} p \oplus \ker p$.
- Exemple : $p = \text{diag}(1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Quelles matrices commutent avec p ?
- Quelle est la dimension de l'espace de ces matrices ?

Exercice 13 – Rotations et absence de vecteur propre

Soit r_θ la rotation de $\mathbb{R}^2$ de matrice $R(\theta)$.

- Pour quels θ existe-t-il $u \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $r_\theta(u) = \lambda u$?
- Pour $\theta = \pi$, décrire r_θ .
- Vu comme application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, montrer que $R(\theta)$ admet les vecteurs propres $(1, -i)$ et $(1, i)$; préciser les valeurs propres.
- Interpréter c) avec la multiplication par $e^{i\theta}$.

Exercice 14 – Projecteur et symétrie sur les fonctions

Sur $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $s(f)(x) = f(-x)$.

- a) Montrer que s est une symétrie ($s^2 = \text{id}$).
- b) Identifier $\ker(s - \text{id})$ et $\ker(s + \text{id})$.
- c) Écrire le projecteur $p = \frac{\text{id} + s}{2}$ et calculer $p(\exp)$, $p(\sin)$.
- d) Montrer que $D \circ s = -s \circ D$ sur les fonctions dérivables (D : dérivation), et en déduire que la dérivée d'une fonction paire est impaire.

Exercice 15 – Synthèse : projection orthogonale sur un plan

Soit $H: x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ et $n = (1, 1, 1)$.

- a) Montrer que la projection orthogonale sur H est $p(u) = u - \frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n$ et écrire sa matrice P .
- b) Vérifier $P^2 = P$, $P^\top = P$ et $\text{tr}P = 2$.
- c) En déduire la matrice S de la réflexion orthogonale par rapport à H , et vérifier $S^2 = I_3$, $S^\top S = I_3$.
- d) Calculer $p(3, 0, 0)$ et $s(3, 0, 0)$ et vérifier géométriquement.