

Plaquette 4 – Matrices d'applications linéaires et changements de bases

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une application linéaire $f: E \rightarrow F$ n'a pas « une » matrice : elle en a une **par choix de bases** B de E et C de F . La colonne j contient les coordonnées dans C de l'image du j -ème vecteur de B . On apprend à **construire** ces matrices (y compris pour des espaces de polynômes ou de matrices), à **composer** (produit), et à **changer de bases** pour obtenir une matrice plus simple (diagonale, triangulaire, forme J_r). Trace, déterminant et rang ne dépendent pas des bases choisies.

Exercice 1 – Matrice entre deux espaces différents

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P \mapsto (P(0), P'(1))$.

- Montrer que f est linéaire et écrire sa matrice A dans les bases canoniques $(1, X, X^2)$ et (e_1, e_2) .
- Déterminer le rang de f ; est-elle surjective ?
- Déterminer $\ker f$ à l'aide de A .
- Écrire la matrice de f si l'on remplace la base de départ par $(1, X - 1, (X - 1)^2)$.

Exercice 2 – Composer, c'est multiplier

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Quelles compositions $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens ? Donner leurs espaces de départ et d'arrivée.
- Calculer leurs matrices.
- Déterminer leurs rangs et vérifier l'inégalité $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg} f, \text{rg} g)$.
- $f \circ g$ peut-il être bijectif ?

Exercice 3 – Forme normale de rang

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- Déterminer $\text{rg} f$, $\ker f$ et $\text{Im} f$.
- On choisit au départ la base $B' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 \in \ker f$, et à l'arrivée $C' = (f(u_1), w)$ complétée par $w = (0, 1)$. Justifier que ce sont des bases.
- Montrer que $\text{Mat}_{B', C'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifier par $Q^{-1}AP$.
- Énoncer le résultat général : toute matrice de rang r est équivalente à J_r .

Exercice 4 – Dimension de $L(E, F)$

Soient E, F de dimensions p et n , avec des bases B, C .

- Montrer que $f \mapsto \text{Mat}_{B,C}(f)$ est un isomorphisme de $L(E, F)$ sur $M_{n,p}(K)$.
- En déduire $\dim L(E, F)$.
- Quelle est la dimension de l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}_3[X]$?
- Donner une base de ces formes linéaires formée d'évaluations $P \mapsto P(a_i)$.

Exercice 5 – Dérivation dans une base adaptée

Sur $\mathbb{R}_3[X]$, soit $D: P \mapsto P'$.

- Écrire la matrice de D dans la base canonique.
- Écrire la matrice de D dans la base $B' = \left(1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6}\right)$.
- Relier les deux matrices par une matrice de passage diagonale.
- En déduire l'expression de D^k dans B' et vérifier que $D^4 = 0$.

Exercice 6 – Translation dans la base binomiale

Sur $\mathbb{R}_3[X]$, soient $B_0 = 1, B_1 = X, B_2 = \frac{X(X-1)}{2}, B_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$ et $T: P \mapsto P(X+1)$.

- Justifier que $(B_0, \dots, B_3)$ est une base.
- Vérifier que $B_k(X+1) = B_k + B_{k-1}$ (formule de Pascal pour $k \geq 1$).
- En déduire la matrice de T dans cette base, puis celle de $\Delta = T - \text{id}$.
- Comparer avec la matrice de T dans la base canonique (triangle de Pascal).

Exercice 7 – Endomorphisme donné dans une autre base

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(u) = 2u$ et $f(v) = u + 2v$, avec $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$.

- Écrire la matrice B de f dans la base (u, v) .
- En déduire sa matrice M dans la base canonique.
- Vérifier $Mu = 2u$ et $Mv = u + 2v$.
- Calculer $\text{tr} f, \det f$ de deux façons.

Exercice 8 – Déterminant d'un endomorphisme de polynômes

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, soit $f(P) = P + P'$.

- Écrire la matrice de f dans la base canonique.
- Calculer $\text{tr} f$ et $\det f$; f est-il bijectif ?
- Montrer que $f^{-1} = \text{id} - D + D^2$ (où D est la dérivation) et calculer $f^{-1}(X^2)$.
- Vérifier en calculant $f(f^{-1}(X^2))$.

Exercice 9 – Endomorphisme de l'espace des matrices

Soit $\Phi: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto M - M^T$.

- Montrer que Φ est linéaire.
- Écrire la matrice de Φ (4×4) dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
- Déterminer $\ker \Phi$ et $\operatorname{Im} \Phi$, et vérifier le théorème du rang.
- Calculer Φ^2 et en déduire que $\frac{1}{2}\Phi$ est un projecteur.

Exercice 10 – Forme linéaire intégrale

Soit $\varphi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$.

- Écrire la matrice (ligne) de φ dans la base canonique.
- Déterminer la dimension et une base de $\ker \varphi$.
- Écrire φ comme combinaison des évaluations $P(0)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$, $P(1)$ (on cherchera les coefficients qui marchent sur 1, X , X^2).
- Reconnaître la formule obtenue.

Exercice 11 – Rotation dans une base non orthonormée

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $\mathbb{R}^2$ et $B' = (e_1, e_1 + e_2)$.

- Écrire la matrice R de r dans la base canonique.
- Calculer $r(e_1)$ et $r(e_1 + e_2)$ dans la base B' , et en déduire $R' = \operatorname{Mat}_{B'}(r)$.
- Vérifier $R' = P^{-1}RP$.
- R' est-elle une matrice de rotation ? Qu'est-ce qui est conservé ?

Exercice 12 – Endomorphisme inversible par sa matrice

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, soit $g(P) = P - P'$.

- Écrire la matrice G de g dans la base canonique.
- Calculer G^{-1} par Gauss-Jordan.
- Interpréter G^{-1} comme la matrice de $\operatorname{id} + D + D^2$.
- Résoudre $P - P' = X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13 – Multiplication à gauche : matrice 4×4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $L_A: M \mapsto AM$ sur $M_2(\mathbb{R})$.

- Écrire la matrice de L_A dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ (attention à l'ordre).
- Montrer qu'elle est diagonale par blocs et en déduire $\det L_A = (\det A)^2$.
- Calculer $\operatorname{tr} L_A$ et comparer avec $\operatorname{tr} A$.
- Que devient la matrice dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$?

Exercice 14 – Rang via une matrice quelconque

Soit $f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P \mapsto (P(1), P(-1))$.

- a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
- b) Déterminer le rang et la dimension du noyau.
- c) Donner une base du noyau.
- d) Refaire b) en utilisant la base de départ $(1, X, X^2 - 1, X^3 - X)$; pourquoi la matrice est-elle plus simple ?

Exercice 15 – Synthèse : diagonaliser $P \mapsto (X - 1)P'$

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, soit $f(P) = (X - 1)P'$.

- a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
- b) Calculer $f((X - 1)^k)$ pour $k = 0, 1, 2$ et en déduire la matrice D de f dans la base $B' = (1, X - 1, (X - 1)^2)$.
- c) Écrire la matrice de passage P et vérifier $P^{-1}AP = D$.
- d) En déduire $\ker f$, $\text{Im} f$ et f^n .