

Plaquette 1 – Noyau, image, théorème du rang et matrices

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On vérifie la linéarité, on calcule **noyau** et **image**, on applique le **théorème du rang**, on écrit la **matrice** dans des bases données et on interprète projecteurs et symétries.

Exercice 1 – Vérifier la linéarité

Ces applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont-elles linéaires ?

- a) $f(x, y) = (x - y, 2x)$
- b) $g(x, y) = (x + 1, y)$
- c) $h(x, y) = (x^2, y)$

Exercice 2 – Noyau et image

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Déterminer $\ker f$, $\text{Im} f$ et vérifier le théorème du rang.

Exercice 3 – Matrice d'une application

Écrire la matrice de $f(x, y, z) = (2x - z, x + y + z)$ dans les bases canoniques.

Exercice 4 – Théorème du rang

Soit $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire de rang 3. Déterminer $\dim \ker f$ et dire si f est injective ou surjective.

Exercice 5 – Endomorphisme bijectif

Soit $f(x, y) = (3x + y, 2x + y)$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 6 – Projecteur

Soit $p(x, y, z) = (x, y, 0)$.

- a) Montrer que p est un projecteur.
- b) Déterminer $\ker p$ et $\text{Im} p$.

Exercice 7 – Symétrie

Soit $s(x, y) = (y, x)$. Montrer que s est une symétrie et préciser ses éléments.

Exercice 8 – Application linéaire sur les polynômes

Soit $\varphi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P'$. Déterminer $\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ et le rang.

Exercice 9 – Composition

Soient $f(x, y) = (x + y, x - y)$ et $g(x, y) = (2x, 3y)$. Calculer les matrices de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10 – Forme linéaire et hyperplan

Soit $\varphi(x, y, z) = x - 2y + 3z$. Déterminer $\ker \varphi$, sa dimension, et une base.

Exercice 11 – Rang d'une matrice et application

Soit f l'application de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{rg} f$, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 12 – Changement de base

Soit f de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en base canonique. Donner sa matrice dans $B' = ((1, 0), (1, 1))$.

Exercice 13 – La trace, forme linéaire

Soit $\operatorname{tr}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Montrer que tr est une forme linéaire, non nulle.
- En déduire la dimension de son noyau par le théorème du rang.
- Montrer que $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}) = \mathbb{R}$ et donner un antécédent de 5.
- Montrer que $\ker \operatorname{tr}$ est engendré par les E_{ij} ($i \neq j$) et les $E_{11} - E_{kk}$ ($k \geq 2$), et vérifier le nombre de vecteurs.

Exercice 14 – Endomorphisme de carré nul

Soit $f \in L(E)$ avec $\dim E = n$ et $f \circ f = 0$.

- Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
- En déduire, avec le théorème du rang, que $\operatorname{rg} f \leq \frac{n}{2}$.
- Exemple : f de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$; vérifier $f^2 = 0$, déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
- Existe-t-il $f \in L(\mathbb{R}^3)$ avec $f^2 = 0$ et $\operatorname{rg} f = 2$?

Exercice 15 – Synthèse : étude complète

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) Calculer A^2 et interpréter.