

Plaquette 2 – Noyau, image et rang dans tous les cadres

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour une application linéaire $f:E \rightarrow F$, on détermine le **noyau** en résolvant $f(x) = 0$ et l'**image** en calculant les images d'une base (ou en résolvant $f(x) = y$ et en lisant les conditions de compatibilité). Le **théorème du rang** relie les deux dimensions et sert de contrôle, ou de preuve quand un calcul est difficile. On travaille avec des matrices, des polynômes, des fonctions : la méthode est la même, seul le calcul change.

Exercice 1 – Noyau et image d'une matrice de rang 2

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- Déterminer $\ker f$ (base, dimension).
- En déduire $\operatorname{rg} f$ puis une base de $\operatorname{Im} f$.
- Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Im} f$ et vérifier sur la troisième colonne.
- La somme $\ker f + \operatorname{Im} f$ est-elle directe ?

Exercice 2 – L'opérateur de différence

Soit $\Delta: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ ($n \geq 1$).

- Montrer que Δ est linéaire et que $\deg \Delta P = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$.
- Déterminer $\ker \Delta$.
- En déduire $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Application : montrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$, et le trouver avec $P(0) = 0$.

Exercice 3 – L'opérateur $P \mapsto XP'$

Soit $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto XP'$.

- Calculer $\varphi(X^k)$ et écrire la matrice de φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
- Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer $\ker(\varphi - \lambda \operatorname{id})$.
- Résoudre $XP' - 2P = X^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4 – Évaluation et interpolation

Soit $\psi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$.

- Montrer que ψ est linéaire et injective.
- En déduire que ψ est un isomorphisme.

- c) Écrire la matrice de ψ (bases canoniques) et calculer son déterminant.
 d) Déterminer $\psi^{-1}(1, 3, 7)$.

Exercice 5 - Multiplication à gauche par une matrice

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $L_A: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM$.

- a) Montrer que L_A est linéaire.
 b) Montrer que L_A est bijective si et seulement si A est inversible.
 c) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer $\ker L_A$ et $\operatorname{rg} L_A$.
 d) Montrer que $\operatorname{rg} L_A = 2\operatorname{rg} A$ (on admettra le cas général à partir de c)).

Exercice 6 - Rang d'une composée

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ linéaires, en dimension finie.

- a) Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ et $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
 b) En déduire $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.
 c) Exemple dans $\mathbb{R}^2$: f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et g de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les rangs de f , g , $g \circ f$.
 d) Montrer que si g est injective, $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Exercice 7 - Surjection de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) \mapsto (x + y + z, y - t)$.

- a) Écrire la matrice de f et déterminer son rang.
 b) Montrer que f est surjective et déterminer $\dim \ker f$ sans résoudre.
 c) Donner une base de $\ker f$.
 d) Résoudre $f(x, y, z, t) = (3, 1)$ (structure affine).

Exercice 8 - Injectif, surjectif en dimension infinie

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, soient $D: P \mapsto P'$ et $M: P \mapsto XP$.

- a) Montrer que D est surjective mais pas injective.
 b) Montrer que M est injective mais pas surjective.
 c) Calculer $D \circ M$ et $M \circ D$. L'une est-elle l'identité ?
 d) Pourquoi cela n'arrive-t-il jamais pour un endomorphisme d'un espace de **dimension finie** ?

Exercice 9 - Application définie sur une base

On définit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(e_1) = (1, 1)$, $f(e_2) = (2, 2)$, $f(e_3) = (0, 1)$.

- a) Justifier que f existe et est unique, et écrire sa matrice.
 b) Calculer $f(x, y, z)$.

c) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

d) Existe-t-il $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire avec $g(1, 0, 0) = (1, 0)$, $g(0, 1, 0) = (0, 1)$ et $g(1, 1, 0) = (1, 2)$?

Exercice 10 - Noyau et image en somme directe

On compare le noyau et l'image de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

a) f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: déterminer $\ker f$, $\operatorname{Im} f$; sont-ils supplémentaires ?

b) g de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: même question.

c) Montrer en général (dimension finie) : $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

d) Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f^2 = \ker f$.

Exercice 11 - Application de rang 1

Soient a, b deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ et $f(x) = (a \cdot x) b$ (produit scalaire).

a) Montrer que f est linéaire et que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(b)$.

b) Déterminer $\ker f$ et vérifier le théorème du rang.

c) Écrire la matrice de f en fonction des colonnes a, b .

d) À quelle condition $f \circ f = f$? Interpréter.

Exercice 12 - L'opérateur d'intégration

Soit $E = C([0; 1])$ et $J: E \rightarrow E, J(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a) Montrer que J est linéaire et injective.

b) Déterminer $\operatorname{Im} J$.

c) J est-elle surjective ? Comparer avec la dimension finie.

d) Calculer $J^n(1)$ et en déduire que $J^n \neq 0$ pour tout n .

Exercice 13 - Noyau d'une famille d'évaluations

Soit $\theta: \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$.

a) Montrer que θ est surjective (utiliser $\mathbb{R}_2[X]$).

b) En déduire $\dim \ker \theta$.

c) Déterminer une base de $\ker \theta$.

d) Décrire l'ensemble des $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tels que $P(-1) = 1, P(0) = 0, P(1) = 1$.

Exercice 14 - Image réciproque d'un sous-espace

Soit $f: E \rightarrow F$ linéaire et G un sous-espace de F .

a) Montrer que $f^{-1}(G) = \{x \in E: f(x) \in G\}$ est un sous-espace de E contenant $\ker f$.

- b) Montrer que $f(f^{-1}(G)) = G \cap \text{Im}f$.
- c) En dimension finie, montrer que $\dim f^{-1}(G) = \dim \ker f + \dim (G \cap \text{Im}f)$.
- d) Application : $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$ et $G = \text{Vect}(1, 1)$. Calculer $f^{-1}(G)$.

Exercice 15 – Synthèse : l'opérateur de Legendre

Soit $L: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $L(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$.

- a) Montrer que L est linéaire et calculer $L(1)$, $L(X)$, $L(X^2)$, $L(X^3)$.
- b) Écrire la matrice de L dans $(1, X, X^2, X^3)$; déterminer son rang et $\ker L$.
- c) Vérifier que $X^2 - \frac{1}{3}$ et $X^3 - \frac{3}{5}X$ vérifient $L(P) = \lambda P$ pour des λ à préciser.
- d) En déduire une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dans laquelle la matrice de L est diagonale.