

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse sur les applications linéaires

Applications linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Ces problèmes mobilisent **tout** le chapitre : noyau et image, théorème du rang, projecteurs, polynômes annulateurs, matrices et changements de base. La démarche type : (1) traduire l'énoncé en inclusions ou en égalités d'applications ; (2) utiliser les **dimensions** pour transformer une inclusion en égalité ; (3) contrôler sur un exemple concret. On rencontre aussi la **dimension infinie**, où les réflexes « injectif $\Rightarrow$ surjectif » tombent.

Exercice 1 – Reconnaître un projecteur

Soit $p \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que p est un projecteur.
- Déterminer $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ et vérifier qu'ils sont supplémentaires.
- Comparer $\operatorname{tr} p$ et $\operatorname{rg} p$; démontrer l'égalité pour tout projecteur.
- Décrire géométriquement p et écrire sa matrice dans une base adaptée.

Exercice 2 – Polynôme annulateur et puissances

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$.
- En déduire $\mathbb{R}^2 = \ker(f - \operatorname{id}) \oplus \ker(f - 2\operatorname{id})$ et donner une base de chacun.
- Montrer que $p = f - \operatorname{id}$ et $q = 2\operatorname{id} - f$ sont les projecteurs associés.
- En déduire $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$ et calculer A^5 .

Exercice 3 – Endomorphisme de carré nul

Soit E de dimension n et $f \in L(E)$ tel que $f^2 = 0$.

- Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
- En déduire $\operatorname{rg} f \leq \frac{n}{2}$.
- Donner, pour $n = 4$, un exemple avec $\operatorname{rg} f = 2$.
- Si $n = 4$ et $\operatorname{rg} f = 2$, montrer qu'il existe une base où la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Inégalité de Sylvester

Soient $f \in L(E, F)$, $g \in L(F, G)$ en dimension finie, $\dim F = n$.

- Appliquer le théorème du rang à la restriction $g|_{\text{Im}f}: \text{Im}f \rightarrow G$.
- En déduire $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}f - \dim(\ker g \cap \text{Im}f)$.
- En déduire l'inégalité de Sylvester $\text{rg}f + \text{rg}g - n \leq \text{rg}(g \circ f)$.
- Application : si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $AB = 0$, montrer que $\text{rg}A + \text{rg}B \leq n$.

Exercice 5 – Noyau et image supplémentaires

Soit $f \in L(E)$, E de dimension finie.

- Montrer que $\ker f \cap \text{Im}f = \{0\} \Leftrightarrow E = \ker f \oplus \text{Im}f$.
- Montrer que $\ker f \cap \text{Im}f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f^2 = \ker f$.
- Tester sur $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Montrer que la propriété est vraie pour tout projecteur.

Exercice 6 – Formes linéaires de même noyau

Soient φ, ψ deux formes linéaires non nulles sur E (dimension n).

- Justifier que $\ker \varphi$ est un hyperplan.
- Soit $a \notin \ker \varphi$. Montrer que $E = \ker \varphi \oplus \text{Vect}(a)$.
- On suppose $\ker \varphi = \ker \psi$. Montrer que $\psi = \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$.
- Application : trouver les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ nulles sur le plan $x + y - z = 0$.

Exercice 7 – Interpolation de Lagrange par l'algèbre linéaire

Soient $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ réels et $\Phi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$.

- Montrer que Φ est linéaire et injective.
- En déduire que Φ est un isomorphisme ; interpréter.
- Trouver $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 7$.
- Montrer que Φ n'est plus injective sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et décrire son noyau.

Exercice 8 – Dimension infinie : dérivation et intégration

Sur $\mathbb{R}[X]$, soient $D(P) = P'$ et $I(P) = \int_0^X P(t) dt$.

- Montrer que D est surjective mais pas injective.
- Montrer que I est injective mais pas surjective.
- Calculer $D \circ I$ et $I \circ D$.
- Expliquer pourquoi ce phénomène est impossible en dimension finie.

Exercice 9 – Commutant d'une matrice

Pour $A \in M_2(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M : AM = MA\}$.

- Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel (noyau d'une application linéaire).
- Déterminer $C(A)$ pour $A = \text{diag}(1, 2)$.
- Déterminer $C(N)$ pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Montrer que $\dim C(A) \geq 2$ pour toute A et déterminer les A telles que $C(A) = M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10 – Trace et crochet $AB - BA$

- Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- En déduire qu'il n'existe aucun couple (A, B) tel que $AB - BA = I_n$.
- Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $D(P) = P'$ et $M(P) = XP$. Calculer $D \circ M - M \circ D$.
- Pourquoi c) ne contredit-il pas b) ?

Exercice 11 – Noyaux itérés d'un endomorphisme nilpotent

Soit $N \in L(\mathbb{R}^5)$ défini par $N(e_1) = 0$ et $N(e_k) = e_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq 5$.

- Déterminer $\ker N^k$ et $\text{rg} N^k$ pour $k = 1, \dots, 5$.
- Montrer en général que $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ et que si $\ker f^k = \ker f^{k+1}$, la suite est stationnaire.
- Quelle est la suite des dimensions $\dim \ker N^k$? Vérifier que les accroissements décroissent.
- Même question pour la dérivation D sur $\mathbb{R}_4[X]$: comparer.

Exercice 12 – Endomorphisme de rang 1

Soit $f \in L(E)$ de rang 1, $\text{Im} f = \text{Vect}(u)$.

- Montrer qu'il existe une forme linéaire φ telle que $f(x) = \varphi(x)u$ pour tout x .
- Montrer que $f^2 = \varphi(u)f$ et que $\text{tr} f = \varphi(u)$.
- Application à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: écrire $A = UV^T$, calculer A^2 et A^n .
- En déduire que si $\text{tr} f \neq 0$, $\frac{1}{\text{tr} f}f$ est un projecteur ; et si $\text{tr} f = 0$, $f^2 = 0$.

Exercice 13 – Une équation linéaire matricielle

Sur $M_n(\mathbb{R})$, soit $\Psi(M) = M + \text{tr}(M)I_n$.

- Montrer que Ψ est linéaire.
- Déterminer $\ker \Psi$; en déduire que Ψ est bijective.
- Résoudre $\Psi(M) = N$ en prenant la trace des deux membres.
- Pour $n = 2$, résoudre $M + \text{tr}(M)I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et vérifier.

Exercice 14 - Opérateur de différence et sommes de puissances

Sur $\mathbb{R}[X]$, soit $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.

- a) Montrer que Δ diminue le degré de 1 exactement (pour $\deg P \geq 1$) et que $\ker \Delta =$ constantes.
- b) En déduire que $\Delta: \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ est surjective.
- c) Trouver P tel que $\Delta P = X^2$ et $P(0) = 0$ (utiliser la base B_k de la plaquette 4 : $X^2 = 2B_2 + B_1$).
- d) En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ et contrôler pour $n = 10$.

Exercice 15 - Synthèse : la différence seconde

Pour $n \geq 2$, soit $\Phi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

- a) Calculer $\Phi(1)$, $\Phi(X)$, $\Phi(X^2)$, $\Phi(X^3)$.
- b) Montrer que Φ diminue le degré de 2 exactement (pour $\deg P \geq 2$) et déterminer $\ker \Phi$.
- c) En déduire $\text{Im} \Phi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
- d) Écrire la matrice de Φ sur $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base canonique, en déduire son rang, et résoudre $\Phi(P) = 6X$ avec $P(0) = P(1) = 0$.