

Applications linéaires

Licence 1 - Fiche de révision

1. Linéarité

$f : E \rightarrow F$ est linéaire si

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Conséquences :

$$f(0) = 0, \quad f(-x) = -f(x).$$

Test express : si $f(0) \neq 0$, f n'est pas linéaire.

2. Noyau et image

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

$\text{Ker } f$ est un sous-espace de E ; $\text{Im } f$ est un sous-espace de F .

3. Injective / surjective

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0\}.$$

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

Bijective = injective + surjective.

4. Théorème du rang

Si $\dim E < \infty$:

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg}(f)$$

avec

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f).$$

Si $\dim E = \dim F$:

$$\text{injective} \iff \text{surjective} \iff \text{bijjective}.$$

5. Image d'une base

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

Injective $\iff (f(e_i))$ libre.

Surjective $\iff (f(e_i))$ génératrice de F .

6. Méthode noyau / image

Noyau : résoudre $f(x) = 0$.

Image : écrire

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum x_j v_j$$

puis extraire une base de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

7. Dimensions impossibles

Si $\dim E > \dim F$: pas d'injectivité.

Si $\dim E < \dim F$: pas de surjectivité.

8. Endomorphisme, isomorphisme

Endomorphisme : $f : E \rightarrow E$ linéaire.

Isomorphisme : linéaire bijective.

Automorphisme : endomorphisme bijectif.

Si f est un isomorphisme, f^{-1} est linéaire.

Matrices, rang et changement de base

9. Matrice d'une application

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ dans E , $\mathcal{C}$ dans F .

La colonne j de

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$$

est $[f(e_j)]_{\mathcal{C}}$.

Si $X = [x]_{\mathcal{B}}$:

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = AX.$$

10. Composition

Pour $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$:

$$\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \text{Mat}(f).$$

Attention à l'ordre : la matrice de l'application effectuée en premier est à droite.

11. Rang matriciel

Si A représente f :

$$\text{rg } A = \text{rg } f.$$

$\text{rg } A$ = nombre de pivots = dimension de l'espace des colonnes.

Si $A \in M_{n,p}$:

$$f \text{ injective} \iff \text{rg } A = p,$$

$$f \text{ surjective} \iff \text{rg } A = n.$$

12. Changement de base général

Si

$$[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}, \quad [y]_{\mathcal{C}} = Q[y]_{\mathcal{C}'},$$

alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Toujours définir la convention de P et Q avant d'appliquer la formule.

13. Endomorphisme : similitude

Pour un endomorphisme, même changement de base au départ et à l'arrivée :

$$A' = P^{-1}AP.$$

A et A' sont **semblables** : même endomorphisme, bases différentes.

14. Projecteur

$$p^2 = p.$$

Alors

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p.$$

$p = \text{Id}$ sur $\text{Im } p$ et $p = 0$ sur $\text{Ker } p$.

15. Symétrie

$$s^2 = \text{Id}.$$

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}).$$

Valeurs : $+1$ sur l'espace fixe, -1 sur l'espace renversé.

16. Isomorphisme et matrice

Si $\dim E = \dim F = n$:

$$f \text{ isomorphisme} \iff A \text{ inversible} \iff \text{rg } A = n.$$

Et

$$\text{Mat}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

17. Pièges à éviter

- $\text{Ker } f \subset E$, mais $\text{Im } f \subset F$.
- Le rang est $\dim(\text{Im } f)$.
- Une matrice dépend des bases choisies.
- $A' = P^{-1}AP$ seulement avec la bonne convention de passage.
- $\text{Mat}(g \circ f) = GF$, pas FG .

18. Checklist exercice

1. Identifier espaces et dimensions.
2. Tester la linéarité si nécessaire.
3. Calculer noyau / image.
4. Utiliser le théorème du rang.
5. Construire la matrice colonne par colonne.
6. Pour un changement de base, écrire d'abord la relation sur les coordonnées.