

Applications linéaires

Licence 1 (L1) - Cours complet

Noyau, image, théorème du rang, matrices et changements de base

Idée directrice. Une application linéaire respecte les combinaisons linéaires. Ses propriétés essentielles se lisent sur deux sous-espaces : le noyau, qui mesure ce qui est envoyé sur 0, et l'image, qui mesure ce qui est atteint. En dimension finie, le théorème du rang relie ces deux informations ; une base transforme ensuite l'application en une matrice.

1. Définition et premières propriétés

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Il suffit aussi de vérifier séparément

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Toute application linéaire vérifie immédiatement

$$f(0_E) = 0_F, \quad f(-x) = -f(x), \quad f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Piège classique

Une application affine de la forme $x \mapsto Ax + b$ n'est linéaire que si $b = 0$. Le test $f(0_E) = 0_F$ élimine très vite de nombreux faux candidats.

Exemple

L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z)$$

est linéaire. En revanche $g(x, y, z) = f(x, y, z) + (1, 0)$ ne l'est pas car $g(0, 0, 0) = (1, 0) \neq 0$.

Applications particulières

- $f : E \rightarrow E$ linéaire : **endomorphisme** de E ;
- $f : E \rightarrow F$ linéaire bijective : **isomorphisme** ;
- endomorphisme bijectif : **automorphisme** ;
- $\text{Id}_E : x \mapsto x$: identité de E ;
- l'application nulle $x \mapsto 0_F$ est linéaire.

2. Noyau et image

Définition

Pour une application linéaire $f : E \rightarrow F$:

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

et

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\} \subset F.$$

Théorème

$\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Preuve pour le noyau. On a $0_E \in \text{Ker } f$. Si $x, y \in \text{Ker } f$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0_F,$$

donc $\lambda x + \mu y \in \text{Ker } f$.

Preuve pour l'image. Si $u = f(x)$ et $v = f(y)$ sont dans $\text{Im } f$, alors

$$\lambda u + \mu v = f(\lambda x + \mu y) \in \text{Im } f.$$

Critères d'injectivité et de surjectivité

Pour $f : E \rightarrow F$ linéaire :

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0_E\}$$

et

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

Pourquoi l'injectivité se lit sur le noyau ? Si $f(x) = f(y)$, alors

$$f(x - y) = 0_F.$$

Ainsi $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ exactement lorsque le seul vecteur envoyé sur 0_F est 0_E .

Calculer un noyau et une image

Pour $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ donnée par des coordonnées :

1. résoudre $f(x) = 0$ pour obtenir $\text{Ker } f$;
2. écrire $f(x_1, \dots, x_p)$ comme combinaison de vecteurs fixes ; ces vecteurs engendrent $\text{Im } f$;
3. éliminer les générateurs redondants pour obtenir une base et le rang.

Exemple

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x - y).$$

Le noyau est défini par

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

donc $x = y = t$ et $z = -2t$:

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, -2)).$$

De plus

$$f(x, y, z) = x(1, 1) + y(1, -1) + z(1, 0).$$

Les deux premiers vecteurs sont libres dans $\mathbb{R}^2$, donc $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

3. Rang et théorème du rang**Définition**

Si $\text{Im } f$ est de dimension finie, le **rang** de f est

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f).$$

Théorème du rang

Si E est de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f).$$

Idée de preuve. On choisit une base $(e_1, \dots, e_k)$ de $\text{Ker } f$ puis on la complète en une base

$$(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$$

de E . Alors

$$(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n))$$

est une base de $\text{Im } f$. Ainsi $\text{rg}(f) = n - k$.

Conséquences en dimension finie

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

— Si $\dim E = \dim F < \infty$, alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

— Si $\dim E > \dim F$, f ne peut pas être injective.

— Si $\dim E < \dim F$, f ne peut pas être surjective.

Exemple

Pour l'exemple précédent, $\dim E = 3$ et $\dim \text{Ker } f = 1$. Donc

$$\text{rg}(f) = 3 - 1 = 2,$$

ce qui confirme $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

4. Image d'une famille génératrice et d'une base

Si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

En particulier, pour calculer l'image d'une application linéaire, il suffit de connaître l'image d'une base.

Théorème

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- f est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre ;
- f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F ;
- si $\dim E = \dim F = n$, f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

5. Composition et inverse

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est linéaire.

Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors son application réciproque

$$f^{-1} : F \rightarrow E$$

est aussi linéaire.

Piège classique

Dans une composition, l'ordre compte : $g \circ f$ signifie « d'abord f , puis g ». Cette inversion apparente se retrouvera dans le produit matriciel.

6. Projecteurs et symétries

Définition

Un endomorphisme $p : E \rightarrow E$ est un **projecteur** si

$$p^2 = p.$$

Théorème

Si $p^2 = p$, alors

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p.$$

De plus p agit comme l'identité sur $\operatorname{Im} p$ et comme l'application nulle sur $\operatorname{Ker} p$.

En effet, pour tout $x \in E$,

$$x = p(x) + (x - p(x)),$$

avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0.$$

Définition

Un endomorphisme $s : E \rightarrow E$ est une **symétrie** si

$$s^2 = \operatorname{Id}_E.$$

Si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ (en particulier sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors

$$E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E).$$

Ce sont les sous-espaces des vecteurs laissés fixes et changés en leur opposé.

7. Matrice d'une application linéaire

Soient

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p) \text{ une base de } E, \quad \mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n) \text{ une base de } F.$$

Définition

La matrice de $f : E \rightarrow F$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

dont la j -ième colonne est le vecteur des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Ainsi, si $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [f(x)]_{\mathcal{C}}$,

$$Y = AX.$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$,

$$f(e_1) = (2, 1), \quad f(e_2) = (1, -1),$$

donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Composition = produit matriciel

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, dans des bases compatibles,

$$\operatorname{Mat}(g \circ f) = \operatorname{Mat}(g) \operatorname{Mat}(f).$$

L'ordre des matrices est donc le même que celui de l'écriture de la composition : la matrice de f est la plus à droite.

Théorème

Pour un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}(f^k) = \text{Mat}(f)^k.$$

Si f est un automorphisme,

$$\text{Mat}(f^{-1}) = \text{Mat}(f)^{-1}.$$

8. Rang d'une matrice et rang d'une application

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$, alors les colonnes de A sont les coordonnées des $f(e_j)$. Donc

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f).$$

Le rang ne dépend pas des bases choisies.

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang est aussi :

- le nombre de pivots après échelonnement ;
- la dimension de l'espace engendré par les colonnes ;
- la dimension de l'espace engendré par les lignes.

Lire les propriétés de f sur sa matrice

Si A représente $f : E \rightarrow F$, avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$:

$$f \text{ injective} \iff \text{rg } A = p,$$

$$f \text{ surjective} \iff \text{rg } A = n.$$

Si $n = p$, alors

$$f \text{ bijective} \iff A \text{ inversible} \iff \text{rg } A = n.$$

9. Changement de base

La matrice d'une application dépend des bases. Il faut donc suivre précisément les matrices de passage.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. Alors

$$[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}.$$

De même, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F et Q la matrice de passage correspondante,

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = Q[f(x)]_{\mathcal{C}'}.$$

Formule générale de changement de bases

Si

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f),$$

alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Cas d'un endomorphisme

Si $f : E \rightarrow E$ et si on remplace la même base $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}'$, on a $Q = P$, donc

$$A' = P^{-1}AP.$$

Définition

Deux matrices carrées A et A' sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Elles représentent alors un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Piège classique

La formule $A' = P^{-1}AP$ ne doit pas être mémorisée sans savoir ce que représente P . Ici, P vérifie $[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}$. Une convention inverse donnerait une écriture différente.

10. Exemple complet : noyau, image, matrice et rang

On considère

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y, x + y, z).$$

Dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le noyau,

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

donc

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((1, -1, 0)).$$

Les colonnes de A engendrent l'image :

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Ainsi

$$\dim \text{Ker } f = 1, \quad \text{rg}(f) = 2,$$

et le théorème du rang donne bien

$$3 = 1 + 2.$$

11. Méthodes à savoir rédiger**Montrer qu'une application est linéaire**

Prendre $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, puis calculer

$$f(\lambda x + \mu y)$$

et faire apparaître

$$\lambda f(x) + \mu f(y).$$

Pour une application donnée par une matrice, la linéarité est immédiate.

Montrer qu'une application est un isomorphisme

En dimension finie, plusieurs voies sont possibles :

- montrer $\text{Ker } f = \{0\}$ lorsque $\dim E = \dim F$;
- montrer $\text{Im } f = F$ lorsque $\dim E = \dim F$;
- montrer que la matrice de f est inversible ;
- construire explicitement f^{-1} .

Construire la matrice de f

Pour chaque vecteur e_j de la base de départ :

1. calculer $f(e_j)$;
2. exprimer $f(e_j)$ dans la base d'arrivée ;
3. placer ce vecteur de coordonnées en colonne j .

12. Pièges classiques

Piège classique

- Confondre $\text{Ker } f \subset E$ et $\text{Im } f \subset F$.
- Affirmer qu'une application linéaire est injective parce que ses images « semblent différentes » : il faut montrer $\text{Ker } f = \{0\}$.
- Oublier que le rang est la dimension de l'image, pas celle du noyau.
- Utiliser le théorème du rang sans hypothèse de dimension finie sur l'espace de départ.
- Former une matrice sans préciser les bases.
- Croire que deux matrices différentes représentent nécessairement deux applications différentes : un changement de base modifie la matrice.
- Inverser l'ordre dans $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \text{Mat}(f)$.

13. Exercices corrigés

Exercice 1 - Injectivité et surjectivité

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 2x).$$

Déterminer $\text{Ker } f$, le rang et dire si f est injective ou surjective.

Correction. $f(x, y) = 0$ donne $x + y = 0$ et $x - y = 0$, donc $x = y = 0$:

$$\text{Ker } f = \{0\}.$$

Ainsi f est injective. Par le théorème du rang,

$$\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^2 - 0 = 2.$$

Comme l'espace d'arrivée est de dimension 3, f n'est pas surjective.

Exercice 2 - Projecteur

Soit $p : E \rightarrow E$ tel que $p^2 = p$. Montrer que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique

$$x = u + v, \quad u \in \text{Im } p, \quad v \in \text{Ker } p.$$

Correction. On écrit

$$x = p(x) + (x - p(x)).$$

Le premier terme est dans $\text{Im } p$ et le second dans $\text{Ker } p$. Si $w \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$, alors $w = p(y)$ et $p(w) = 0$. Mais

$$p(w) = p^2(y) = p(y) = w,$$

donc $w = 0$. La somme est directe, donc la décomposition est unique.

Exercice 3 - Matrice dans des bases non canoniques

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y)$. On prend

$$\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1)), \quad \mathcal{C} = ((1, 1), (0, 1)).$$

Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$.

Correction. Pour $e'_1 = (1, 0)$,

$$f(e'_1) = (1, 0) = 1(1, 1) - 1(0, 1),$$

donc la première colonne est $(1, -1)^T$. Pour $e'_2 = (1, 1)$,

$$f(e'_2) = (2, 1) = 2(1, 1) - 1(0, 1),$$

donc

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

14. À retenir

- Linéarité : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
- f injective $\iff \text{Ker } f = \{0\}$; f surjective $\iff \text{Im } f = F$.
- Théorème du rang : $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.
- Une matrice est construite colonne par colonne avec les images des vecteurs de base.
- Composition : $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \text{Mat}(f)$.
- Pour un endomorphisme, changement de base : $A' = P^{-1}AP$.
- La matrice dépend des bases ; le rang, lui, n'en dépend pas.