

Plaquette 2 – Divisibilité, PGCD et lemme de Gauss : démonstrations

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On **démontre** plutôt qu'on ne calcule : réduire un PGCD par combinaisons linéaires ($a \wedge b = b \wedge (a - kb)$), exhiber une relation de **Bézout** pour prouver que deux entiers sont premiers entre eux, utiliser le lemme de **Gauss** pour transférer une divisibilité, et **factoriser** $a^n - b^n$. Chaque exercice mêle une démonstration générale et une application chiffrée qui la contrôle.

Exercice 1 – PGCD dépendant d'un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $\text{pgcd}(2n + 3, 3n + 4) = 1$.
- Montrer que $\text{pgcd}(n^2 + 1, n + 1)$ vaut 1 ou 2, et préciser selon la parité de n .
- Déterminer $\text{pgcd}(n^2 + 1, n + 1)$ pour $n = 7$ et $n = 10$ directement.

Exercice 2 – PGCD de nombres de Mersenne

Pour $n \geq 1$, on pose $M_n = 2^n - 1$.

- Montrer que si $d \mid n$, alors $M_d \mid M_n$.
- Soient $a > b \geq 1$ et $a = bq + r$ la division euclidienne. Montrer que $M_a \equiv M_r \pmod{M_b}$.
- En déduire que $\text{pgcd}(M_a, M_b) = M_{\text{pgcd}(a, b)}$.
- Calculer $\text{pgcd}(2^{12} - 1, 2^{18} - 1)$ de deux façons.

Exercice 3 – Suite de Fibonacci et PGCD

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- Démontrer l'**identité de Cassini** : $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire que deux termes consécutifs F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
- Retrouver b) par une récurrence utilisant $\text{pgcd}(F_{n+1}, F_n) = \text{pgcd}(F_n, F_{n-1})$.
- Vérifier sur les valeurs F_0 à F_{12} que $\text{pgcd}(F_{12}, F_{18}) = F_6$ (propriété admise : $\text{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\text{pgcd}(m, n)}$).

Exercice 4 – Irrationalité par le lemme de Gauss

- Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel en supposant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.
- Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel.
- Montrer que $\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.

d) Le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

Exercice 5 - PGCD et PPCM imposés

- a) Montrer que si $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $a = da'$, $b = db'$, alors $a' \wedge b' = 1$ et $\text{ppcm}(a, b) = da'b'$.
- b) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels avec $a \leq b$, $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $\text{ppcm}(a, b) = 360$.
- c) Déterminer tous les couples (a, b) avec $a \leq b$, $a + b = 144$ et $\text{pgcd}(a, b) = 18$.
- d) Existe-t-il a, b avec $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $\text{ppcm}(a, b) = 100$?

Exercice 6 - Divisibilité par 30

- a) Démontrer que si $a \wedge b = 1$, $a \mid c$ et $b \mid c$, alors $ab \mid c$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.
- c) En déduire que 30 divise $n^5 - n$ pour tout entier n .
- d) Contrôler pour $n = 2, 3$ et 7 .

Exercice 7 - Euclide étendu en tableau

- a) Calculer $d = \text{pgcd}(1\,769, 551)$ par l'algorithme d'Euclide.
- b) Remonter l'algorithme pour obtenir u, v avec $1\,769u + 551v = d$.
- c) Présenter le même calcul sous forme de tableau (algorithme d'Euclide **étendu**) : on maintient à chaque ligne $r_k = 1\,769u_k + 551v_k$.
- d) Décrire toutes les solutions (u, v) de $1\,769u + 551v = d$.

Exercice 8 - Trois nombres premiers dans leur ensemble

- a) Montrer que 6, 10 et 15 ne sont pas premiers entre eux deux à deux, mais que $\text{pgcd}(6, 10, 15) = 1$.
- b) Trouver des entiers u, v, w tels que $6u + 10v + 15w = 1$.
- c) En déduire que tout entier n s'écrit $6x + 10y + 15z$ avec $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- d) Montrer que $\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$ et le vérifier ici.

Exercice 9 - Diviseurs d'une expression

On cherche tous les entiers relatifs $n \neq -3$ tels que $n + 3$ divise $n^2 + 5$.

- a) Montrer que $n^2 + 5 = (n + 3)(n - 3) + 14$.
- b) En déduire que $n + 3 \mid n^2 + 5 \Leftrightarrow n + 3 \mid 14$.
- c) Déterminer toutes les solutions et vérifier deux d'entre elles.
- d) Même question pour $n + 1 \mid n^3 + 2$.

Exercice 10 - Fractions irréductibles

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.
- b) Pour quels entiers n la fraction $\frac{n+7}{n+2}$ est-elle irréductible ?
- c) Montrer que si $a \wedge b = 1$, alors $(a+b) \wedge ab = 1$.
- d) En déduire que si $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{a+b}{ab}$ l'est aussi. Illustrer avec $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Exercice 11 - Phares et engrenages

- a) Deux phares émettent un éclat, l'un toutes les 18 secondes, l'autre toutes les 24 secondes. Ils émettent ensemble à minuit. Quand émettent-ils à nouveau ensemble ?
- b) Un troisième phare a une période de 30 secondes. Au bout de combien de temps les trois émettent-ils ensemble ?
- c) Un engrenage à 42 dents entraîne une roue à 30 dents. Au bout de combien de tours de la grande roue les deux dents marquées au départ se retrouvent-elles en contact ?
- d) Justifier la formule $\text{ppcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{pgcd}(a, b)}$ utilisée.

Exercice 12 - Critères de divisibilité démontrés

Soit $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ un entier écrit en base 10 ($n = \sum_{i=0}^k a_i 10^i$).

- a) Montrer que $n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k \pmod{9}$. En déduire le critère de divisibilité par 3 et par 9.
- b) Montrer que $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pmod{11}$.
- c) Déterminer le chiffre a pour que $\overline{38a52}$ soit divisible par 11.
- d) Déterminer les chiffres x tels que $\overline{2x7x}$ soit divisible par 9.

Exercice 13 - Premier avec un produit

- a) Montrer que si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$ (on multipliera deux relations de Bézout).
- b) En déduire que si $a \wedge b = 1$, alors $a^m \wedge b^n = 1$ pour tous $m, n \geq 1$.
- c) Application : montrer que pour tout $n \geq 1$, $\text{pgcd}(n, n^2 + 1) = 1$, puis que $\text{pgcd}(n^3, (n^2 + 1)^5) = 1$.
- d) Montrer que si $a \wedge b = 1$ et ab est un carré parfait (avec $a, b \geq 1$), alors a et b sont des carrés parfaits.

Exercice 14 - Somme des diviseurs et nombres parfaits

Pour $n \geq 1$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n . Un entier est **parfait** si $\sigma(n) = 2n$.

- a) Calculer $\sigma(p^k)$ pour p premier et $k \geq 1$.
- b) On admet que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ si $a \wedge b = 1$. Calculer $\sigma(360)$.

- c) Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait (théorème d'**Euclide**).
- d) Vérifier que 6, 28 et 496 sont parfaits, et identifier les p correspondants.

Exercice 15 – Synthèse : les nombres de Mersenne

Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$ des entiers.

- a) Montrer que $a - 1$ divise $a^n - 1$. En déduire que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$.
- b) Montrer que si $n = rs$ avec $1 < r < n$, alors $2^r - 1$ est un diviseur **strict** de $2^n - 1$, différent de 1.
- c) En déduire : si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
- d) La réciproque est fausse : factoriser $2^{11} - 1$. Donner les valeurs de $n \leq 7$ pour lesquelles $2^n - 1$ est premier.