

Plaquette 1 - Division euclidienne, PGCD, Bézout et congruences

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On calcule un PGCD par **Euclide**, on remonte l'algorithme pour une relation de **Bézout**, on résout des équations diophantiennes et des congruences, et on utilise la **décomposition en facteurs premiers**.

Exercice 1 - Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de -47 par 6 .

Exercice 2 - Algorithme d'Euclide

Calculer $\text{pgcd}(462, 1\,071)$ et $\text{ppcm}(462, 1\,071)$.

Exercice 3 - Relation de Bézout

Déterminer u, v entiers tels que $23u + 17v = 1$.

Exercice 4 - Équation diophantienne

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $5x + 8y = 3$.

Exercice 5 - Nombres premiers

Le nombre 221 est-il premier ? Et 211 ?

Exercice 6 - Congruences et reste

Déterminer le reste de 2^{100} dans la division par 7 .

Exercice 7 - Critère de divisibilité

Démontrer le critère de divisibilité par 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.

Exercice 8 - Théorème chinois

Un entier laisse un reste de 2 dans la division par 5 et de 3 dans la division par 7 . Quel est son reste modulo 35 ?

Exercice 9 - Petit théorème de Fermat

Calculer le reste de 7^{222} modulo 11 .

Exercice 10 - Inverse modulaire

Déterminer l'inverse de 7 modulo 26, puis résoudre $7x \equiv 3 \pmod{26}$.

Exercice 11 - Nombres premiers entre eux

Montrer que $\text{pgcd}(n^2 + n, 2n + 1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 - Décomposition en facteurs premiers

Décomposer 360 et 84, puis en déduire leur PGCD, leur PPCM et le nombre de diviseurs de 360.

Exercice 13 - Racines rationnelles d'un polynôme

On considère $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

- a) Soit $\frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P écrite sous forme **irréductible** ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$). Montrer que p divise 1 et que q divise 2.
- b) En déduire la liste des racines rationnelles possibles et les tester.
- c) Factoriser P et résoudre $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 - Congruence à coefficient non inversible

- a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $6x \equiv 4 \pmod{10}$.
- b) Montrer que $6x \equiv 5 \pmod{10}$ n'a aucune solution.
- c) Énoncer la règle générale pour $ax \equiv b \pmod{n}$ et donner le nombre de solutions modulo n quand il y en a.

Exercice 15 - Synthèse : chiffre des unités et divisibilité

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.