

Plaquette 4 - Inversibilité, changement de base et similitude

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critères d'inversibilité pour $A \in M_n(K)$ (tous équivalents) :

- $\text{rg}A = n$; $AX = 0 \Rightarrow X = 0$; il existe B avec $AB = I_n$ (alors $BA = I_n$ aussi) ; $\det A \neq 0$.
- Si $Q(A) = 0$ avec $Q(0) \neq 0$, alors A est inversible et A^{-1} s'obtient comme polynôme en A .

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B, \quad XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

Changement de base. Si P est la matrice de passage (colonnes : nouveaux vecteurs exprimés dans l'ancienne base) :

- coordonnées : $X = PX'$; matrice d'une application linéaire : $A' = P^{-1}AP$.
- **Semblables** ($B = P^{-1}AP$) : même trace, même déterminant, même rang, et $B^n = P^{-1}A^nP$.
- A est **diagonalisable** si elle est semblable à une diagonale ; les colonnes de P sont alors des vecteurs propres.

Correction de l'exercice 1 - Inversibilité selon un paramètre

a) $L_2 - L_1 = (0, 1, 3)$; $L_3 - L_1 = (0, a - 1, a^2 - 1)$; $L_3 \leftarrow L_3 - (a - 1)L_2$:
 $(0, 0, a^2 - 1 - 3(a - 1)) = (0, 0, (a - 1)(a - 2))$.

$$\det A_a = 1 \times 1 \times (a - 1)(a - 2)$$

- Contrôle : $a = 0$ donne 2, $a = 3$ donne 2 ✓ (calcul exact).

b) Inversible $\Leftrightarrow a \notin \{1, 2\}$.

c) $a = 1$: A_1 a deux lignes égales ($L_1 = L_3$). Système $x + y + z = 0$, $x + 2y + 4z = 0$:
 $y + 3z = 0$, $y = -3z$, $x = 2z$.

- $\ker A_1 = \text{Vect}(2, -3, 1)$. **Vérification** : $2 - 3 + 1 = 0$, $2 - 6 + 4 = 0$ ✓

d) $A_a X$ donne les valeurs de $P = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ en $t = 1, 2, a$. Inversible $\Leftrightarrow$ l'interpolation aux trois nœuds a une solution unique $\Leftrightarrow$ les nœuds sont **distincts** ($a \neq 1, 2$).

- Pour $a = 1$, le noyau $(2, -3, 1)$ est le polynôme $2 - 3t + t^2 = (t - 1)(t - 2)$, nul aux nœuds ✓

Réponse. $\det A_a = (a - 1)(a - 2)$; inversible $\Leftrightarrow a \notin \{1, 2\}$; $\ker A_1 = \text{Vect}(2, -3, 1)$.

Correction de l'exercice 2 - Inverse par un polynôme annulateur

a) On isole I_n : $A^2 - 3A = -2I_n$, soit $A \left(\frac{3I_n - A}{2} \right) = I_n$.

$$A^{-1} = \frac{3I_n - A}{2}$$

- (Les deux facteurs commutent, donc c'est aussi un inverse à gauche.)

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $3A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ✓ Donc $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

— **Contrôle** : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ✓

c) $(A - I)(A - 2I) = A^2 - 3A + 2I = 0$. Si les deux étaient inversibles, leur produit le serait aussi, et ne pourrait pas être nul (pour $n \geq 1$).

— Au moins l'une des deux n'est pas inversible : 1 ou 2 est **valeur propre** de A . Ici les deux (A est triangulaire de diagonale 1, 2).

d) Si $A^2 = 3A$ et A inversible, on multiplie par A^{-1} : $A = 3I_n$. Réciproquement $3I_n$ convient. La seule matrice inversible vérifiant $A^2 = 3A$ est $3I_n$ (le polynôme $X^2 - 3X$ a un terme constant **nul**).

Réponse. $A^{-1} = \frac{3I-A}{2}$; en b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; $(A - I)(A - 2I) = 0$; $A^2 = 3A$ inversible $\Leftrightarrow A = 3I$.

Correction de l'exercice 3 - Équations $AX = B$ et $XA = B$

a) $\det A = 6 - 5 = 1$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

b) On multiplie **du bon côté** :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -5+4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6-5 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— **Vérifications** : $A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ ; $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

c) Non : $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ car le produit n'est pas commutatif. Écrire « $X = \frac{B}{A}$ » n'a **aucun sens** pour des matrices.

d) $AXA = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$.

— **Contrôle** : $\det X = 40 - 39 = 1 = \frac{\det B}{(\det A)^2}$ ✓

Réponse. $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 - Inverse d'un produit et d'une transposée

a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$, et de même dans l'autre sens.

— **Image** : on enfle les chaussettes (B) puis les chaussures (A) ; pour défaire, on enlève d'abord les chaussures.

b) On transpose $AA^{-1} = I$: $(A^{-1})^T A^T = I$; de même $A^T (A^{-1})^T = I$. Réciproque : appliquer à A^T (car $(A^T)^T = A$).

c) Si B n'était pas inversible, il existerait $X \neq 0$ avec $BX = 0$, donc $ABX = 0$: AB non inversible. Donc B est inversible, puis $A = (AB)B^{-1}$ l'est.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : AB = I_2.$

— $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang $2 < 3$: **non inversible**. Le résultat « $AB = I \Rightarrow BA = I$ » exige des matrices **carrées**.

Réponse. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; pour des rectangulaires, $AB = I$ n'entraîne pas $BA = I$.

Correction de l'exercice 5 - Inverse à droite et inverse à gauche

a) Si $BX = 0$, alors $X = I_n X = ABX = A0 = 0$.

b) Le système homogène $BX = 0$ n'a que la solution nulle : $\text{rg} B = n$, donc B est inversible (matrice carrée).

c) On multiplie $AB = I_n$ à droite par B^{-1} : $A = B^{-1}$. Donc $BA = BB^{-1} = I_n$.
 $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$ (matrices carrées)

d) Par c), $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = I_2$; **vérification** : $7 - 6 = 1$, $14 - 14 = 0$, $-3 + 3 = 0$, $-6 + 7 = 1$ ✓

— **Intérêt** : pour prouver qu'une matrice carrée est l'inverse d'une autre, **un seul** produit suffit.

Réponse. $AB = I_n \Rightarrow B$ inversible et $BA = I_n$ (matrices carrées).

Correction de l'exercice 6 - Coordonnées dans une nouvelle base

a) u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires : base de $\mathbb{R}^2$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (colonnes = nouveaux vecteurs).

b) $\det P = -2$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$X' = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $3u_1 + 2u_2 = (3, 3) + (2, -2) = (5, 1)$ ✓

d) $X = PX' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

— **Piège** : la formule $X = PX'$ va « des nouvelles coordonnées vers les anciennes » ; dans l'autre sens il faut P^{-1} .

Réponse. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $v = 3u_1 + 2u_2$; $(2, -3)_{B'} = (-1, 5)$.

Correction de l'exercice 7 - Invariants de similitude

a) $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr} A$; $\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$; multiplier par des inversibles ne change pas le rang.

b) Si $P^{-1}I_2P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: absurde. La seule matrice semblable à I_2 est I_2 .

— **Non** semblables : trace et déterminant ne suffisent pas à caractériser la similitude.

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $BV = V$ pour $V = (1, 0)$; $BV = 2V$: $(B - 2I)V = 0$, $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V = 0$, $V = (5, 1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Oui**, semblables (vérification : $BP = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P \text{diag}(1, 2)$ ✓).

d) $B^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots = P^{-1}A^nP$ (les PP^{-1} intérieurs se simplifient).

Réponse. Trace, déterminant, rang invariants ; I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non semblables ; $\text{diag}(1, 2)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ semblables.

Correction de l'exercice 8 - Diagonaliser une matrice symétrique

a) $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$: $\lambda \in \{1, 3\}$.

b) $\lambda = 3$: $x = y$, $V_1 = (1, 1)$; $\lambda = 1$: $x = -y$, $V_2 = (1, -1)$.

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— (Calcul exact ; plus rapidement, AP a pour colonnes $3V_1$ et V_2 .)

d) $V_1 \cdot V_2 = 1 - 1 = 0$: orthogonaux. On les **normalise** : $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et

$$Q^T Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I \quad \checkmark$$

— $Q^T A Q = \text{diag}(3, 1)$. **Théorème spectral** (admis) : toute matrice symétrique réelle se diagonalise ainsi, dans une base **orthonormée**.

Réponse. $\lambda \in \{1, 3\}$; $P^{-1}AP = \text{diag}(3, 1)$; $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ orthogonale.

Correction de l'exercice 9 - Inverse d'une matrice tridiagonale

a) $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$: $(0, \frac{3}{2}, -1)$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2$: $(0, 0, \frac{4}{3})$. Pivots $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, tous non nuls : inversible, $\det T = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 4$.

b) Gauss-Jordan (calcul exact) :

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Ligne 1 de T , $(2, -1, 0)$, fois les colonnes de $4T^{-1}$: $6 - 2 = 4$; $4 - 4 = 0$; $2 - 2 = 0$. Après division par 4 : $(1, 0, 0)$ ✓

d) T symétrique $\Rightarrow T^{-1}$ symétrique (exercice de la plaquette 2). Positivité : T représente un opérateur de type « $-u''$ » (voir le système tridiagonal de la plaquette sur les systèmes) ; résoudre $TU = F$ avec $F \geq 0$ (une source de chaleur positive) donne $U \geq 0$. Chaque source influence **tous** les points (colonnes pleines de T^{-1}), davantage les plus proches.

Réponse. $\det T = 4$; $T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 - L'identité $I + AB$ et $I + BA$

a) Posons $M = (I_n + AB)^{-1}$. On calcule :

$$(I_p + BA)(I_p - BMA) = I_p + BA - BMA - BABMA = I_p + BA - B(I_n + AB)MA = I_p + BA - BA = I_p$$

— (On a factorisé $B(\dots)A$ au milieu.) C'est l'inverse annoncé (matrices carrées : un côté suffit).

b) $AB = 3 + 8 = 11$ (un réel), $1 + AB = 12$. $BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (rang 1) :

$$— (I_2 + BA)^{-1} = I_2 - \frac{1}{12}BA = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) $I_2 + BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; produit par l'inverse trouvé, première ligne : $(3 - 2, -2 + 2) = (1, 0)$

✓ ; deuxième : $(3 - 3, -2 + 3) = (0, 1)$ ✓

d) AB est $n \times n$ et BA est $p \times p$. Pour $n = p$: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ (plaquette 2). **Intérêt** : inverser $I_p + BA$ se ramène à inverser $I_n + AB$, beaucoup plus petite si $n \ll p$ (ici un simple nombre).

Réponse. $(I_p + BA)^{-1} = I_p - B(I_n + AB)^{-1}A$; en b) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 - Diagonale strictement dominante

a) Ligne 1 : $4 > 1 + 1$; ligne 2 : $5 > 1 + 2$; ligne 3 : $3 > 0 + 1$ ✓

b) Ligne i de $AX = 0$: $a_{ii}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$, donc

$$|a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j| \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) |x_i| < |a_{ii}||x_i|$$

— (On divise par $|x_i| > 0$ à la fin.) L'inégalité stricte $|a_{ii}||x_i| < |a_{ii}||x_i|$ est absurde.

c) Le noyau est réduit à $\{0\}$: A est inversible. **Contrôle** : $\det A = 50 \neq 0$ (calcul exact).

d) Non : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible ($\det = -2$) sans être à diagonale dominante. C'est une **condition suffisante**, très utilisée en analyse numérique (elle garantit aussi la convergence de certaines méthodes itératives).

Réponse. Diagonale strictement dominante $\Rightarrow$ noyau nul $\Rightarrow$ inversible ; $\det A = 50$; réciproque fausse.

Correction de l'exercice 12 - Colonnes libres et matrice de Gram

a) $G = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 0+1+2 \\ 0+1+2 & 0+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\det G = 15 - 9 = 6 \neq 0$.

b) $A^T A$ est carrée ; elle est inversible $\Leftrightarrow \ker(A^T A) = \{0\} \Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow$ les colonnes de A sont **libres** (une relation $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$ est un vecteur de $\ker A$).

$$A^T A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{rg} A = \text{nombre de colonnes}$$

c) $\text{rg}(AA^T) \leq \text{rg}A = 2 < 3$: non inversible.

d) $G_{ij} = C_i \cdot C_j$: les **produits scalaires** des colonnes (matrice de Gram). $\det G$ est le carré de l'aire du parallélogramme construit sur C_1, C_2 : aire $\sqrt{6}$.

— C'est exactement la matrice des équations normales des moindres carrés pour la droite passant au mieux par $(0, y_1), (1, y_2), (2, y_3)$.

Réponse. $G = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\det G = 6$; $A^T A$ inversible $\Leftrightarrow$ colonnes libres.

Correction de l'exercice 13 - Inverse d'une unipotente paramétrée

a) $N^2 = E_{13} : I + aN + a^2N^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

b) $(I - aN)(I + aN + a^2N^2) = I - a^3N^3 = I$ (car $N^3 = 0$) :

$$U_a^{-1} = I_3 - aN = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle** : coefficient $(1, 3)$ de $U_a^{-1}U_a$: $a^2 - a \cdot a + 0 = 0 \checkmark$

c) $U_a U_b = (I + aN + a^2N^2)(I + bN + b^2N^2) = I + (a + b)N + (a^2 + ab + b^2)N^2$.

— Pour être U_c , il faudrait $c = a + b$ et $c^2 = a^2 + ab + b^2$, soit $2ab = ab$, donc $ab = 0$. En général **non** : l'ensemble des U_a n'est pas stable par produit.

d) b) donne $U_a = (I - aN)^{-1}$, et c'est la série $\sum_k (aN)^k = \frac{1}{1 - aN}$, qui s'arrête car $N^3 = 0$.

Réponse. $U_a^{-1} = I_3 - aN$; $U_a U_b$ n'est un U_c que si $ab = 0$; $U_a = (I_3 - aN)^{-1}$.

Correction de l'exercice 14 - Puissances par conjugaison

a) Vu précédemment : $BP = PD$ ($BV_1 = V_1, BV_2 = 2V_2$).

b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = PDP^{-1}$, donc

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 + 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; formule : $5(4 - 1) = 15 \checkmark$

d) Formule triangulaire $\begin{pmatrix} a^n & b \frac{a^n - c^n}{a - c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ avec $a = 1, b = 5, c = 2$: $5 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 5(2^n - 1) \checkmark$

Les deux méthodes concordent.

Réponse. $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 5(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : matrice d'une projection oblique

a) $(1, 2)$ et $(1, -1)$ ne sont pas colinéaires. p fixe $(1, 2)$ et annule $(1, -1)$: dans B' , sa matrice est $D = \text{diag}(1, 0)$.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det P = -3$, $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$:

$$M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $M^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = M \checkmark$; $\text{tr}M = \frac{1+2}{3} = 1 \checkmark$ (rang 1) ; $M(1, 2) = \frac{1}{3}(3, 6) = (1, 2) \checkmark$;
 $M(1, -1) = (0, 0) \checkmark$

d) $M(3, 0) = (1, 2)$.

- **Géométrie** : $(3, 0) = (1, 2) + (2, -2)$, avec $(1, 2) \in D_1$ et $(2, -2) \in D_2 \checkmark$ Le projeté est la composante sur D_1 .
- **Méthode** : on écrit une application **là où elle est simple** (base adaptée), puis on revient à la base canonique par $M = PDP^{-1}$.

Réponse. $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $M^2 = M$, $\text{tr}M = 1$; $p(3, 0) = (1, 2)$.