

Plaquette 5 - Matrices en action : géométrie, dynamique et codage

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Construire une matrice. La colonne j de la matrice d'une application linéaire est l'image du j -ème vecteur de base.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

— $R(\theta)$: rotation ; $S(\theta)$: réflexion d'axe la droite d'angle θ ; $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: cisaillement.

— **Composition** : « B puis A » a pour matrice AB (on lit **de droite à gauche**).

— **Aire** : l'image d'une surface d'aire A a pour aire $|\det M|A$.

— **Coordonnées homogènes** : la translation de vecteur (a, b) est la matrice 3×3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ agissant sur $(x, y, 1)$.

— **Dynamique** $X_{n+1} = AX_n$; $X_n = A^n X_0$; à long terme, la plus grande valeur propre (en module) donne le **taux de croissance**.

— **Chaîne absorbante** : si Q décrit les transitions entre états non absorbants, $N = (I - Q)^{-1}$ donne les nombres moyens de passages.

Correction de l'exercice 1 - Modèle de Leslie

a) Nouveaux jeunes : $1,5a + v$; nouveaux adultes : $0,5j$; nouveaux vieux : $0,8a$.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $X_1 = LX_0 = (150 + 100, 50, 80) = (250, 50, 80)$.

— $X_2 = LX_1 = (1,5 \times 50 + 80, 0,5 \times 250, 0,8 \times 50) = (155, 125, 40)$.

c) Totaux : 300, 380, 320 : la population oscille (la structure d'âge n'est pas encore stabilisée).

d) La **première ligne** contient les **fécondités** (toutes les classes peuvent produire des jeunes) ; la **sous-diagonale** contient les **taux de survie** (on passe de la classe i à la classe $i + 1$). Tous les autres coefficients sont nuls : on ne rajeunit pas et on ne saute pas de classe.

Réponse. $L = \begin{pmatrix} 0 & 1,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$; $X_1 = (250, 50, 80)$, $X_2 = (155, 125, 40)$.

Correction de l'exercice 2 - Composer rotation et cisaillement

a) $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$RC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad CR = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— $RC \neq CR$.

b) $(RC)X = R(CX)$: on applique **d'abord** C puis R . Donc « C puis R » = RC , et « R puis C » = CR .

— **Contrôle** sur $e_1 = (1, 0)$: $Ce_1 = e_1$, puis $Re_1 = (0, 1)$; et RC a pour première colonne $(0, 1)$ ✓

c) $C(x, y) = (x + y, y)$: sommets images $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$: un **parallélogramme** (figure), de base 1 et hauteur 1, d'aire 1.

d) $\det C = 1$, $\det R = 1$, donc $\det(RC) = \det(CR) = 1$: les deux composées conservent les aires (mais pas les formes).

Réponse. $RC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (« C puis R »), $CR = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; aires conservées ($\det = 1$).

Correction de l'exercice 3 - Coordonnées homogènes et rotation autour d'un point

$$\mathbf{a)} \quad T_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— **Intérêt** : une translation n'est pas linéaire en dimension 2, mais le devient en dimension 3 ; toutes les transformations affines se composent par **produit**.

b) $T \circ R$: on tourne $(1, 0)$ en $(0, 1)$, puis on translate : $(2, 1)$. $R \circ T$: on translate en $(3, 0)$, puis on tourne : $(0, 3)$.

— Résultats différents : translation et rotation **ne commutent pas**.

c) Pour tourner autour de Ω : ramener Ω en O ($T_{(-1,-1)}$), tourner (R), revenir ($T_{(1,1)}$).
Produit :

$$T_{(1,1)}RT_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— (On a $RT_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis on ajoute $(1, 1)$ à la dernière colonne.)

d) Image de $\Omega = (1, 1, 1)$: $(-1 + 2, 1 + 0, 1) = (1, 1, 1)$: fixe ✓ Image de $O = (0, 0, 1)$: $(2, 0, 1)$, soit le point $(2, 0)$.

— **Contrôle** : $\overrightarrow{O\Omega} = (-1, -1)$ tourné de $\frac{\pi}{2}$ donne $(1, -1)$, et $\Omega + (1, -1) = (2, 0)$ ✓

Réponse. $T \circ R(1, 0) = (2, 1)$, $R \circ T(1, 0) = (0, 3)$; rotation autour de $(1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$O \mapsto (2, 0)$.

Correction de l'exercice 4 - Composer deux réflexions

a) $S(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta \\ \sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ (formules $\cos(2\theta - \theta)$, $\sin(2\theta - \theta)$).

— De même, le vecteur orthogonal est envoyé sur son opposé : réflexion d'axe dirigé par $(\cos \theta, \sin \theta)$.

b) $\det S = -\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = -1$ (renverse l'orientation) ; $S^2 = I_2$ (involution).

c) Produit (formules d'addition) :

$$S(\beta)S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2(\beta - \alpha) & -\sin 2(\beta - \alpha) \\ \sin 2(\beta - \alpha) & \cos 2(\beta - \alpha) \end{pmatrix} = R(2(\beta - \alpha))$$

— (Coefficient $(1, 1)$: $\cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta \sin 2\alpha = \cos(2\beta - 2\alpha)$; contrôle numérique pour $\alpha = 0,3, \beta = 1,1$ ✓)

d) Axe $y = x$: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; axe $y = 0$: $S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

— $S(\frac{\pi}{4})S(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R(\frac{\pi}{2})$ ✓ ($2(\beta - \alpha) = \frac{\pi}{2}$).

Réponse. $\det S = -1$, $S^2 = I$; $S(\beta)S(\alpha) = R(2(\beta - \alpha))$; $S(\pi/4)S(0) = R(\pi/2)$.

Correction de l'exercice 5 - Rotations de l'espace

a) $R_z : e_1 \mapsto e_2, e_2 \mapsto -e_1, e_3 \mapsto e_3$; $R_x : e_1 \mapsto e_1, e_2 \mapsto e_3, e_3 \mapsto -e_2$.

$$R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $R_z R_x e_1 = R_z e_1 = e_2$; $R_x R_z e_1 = R_x e_2 = e_3$. Différents : les rotations de l'espace **ne commutent pas** (contrairement à celles du plan). Faites l'expérience avec un livre.

c) Quatre quarts de tour : $R_z^4 = I_3$. $\det R_z = 1$ (rotation : conserve volumes et orientation).

d) R_z et R_x sont orthogonales (leurs colonnes sont orthonormées), donc $(R_z R_x)^T (R_z R_x) = R_x^T R_z^T R_z R_x = R_x^T R_x = I_3$ ✓ Le produit de deux rotations est une rotation.

Réponse. $R_z R_x e_1 = e_2 \neq e_3 = R_x R_z e_1$: non commutatives ; $R_z^4 = I_3$; $R_z R_x$ orthogonale.

Correction de l'exercice 6 - Aire et déterminant

a) Images de e_1, e_2 : les colonnes $u = (3, 1)$ et $v = (1, 2)$. L'image du carré est le parallélogramme construit sur u et v , d'aire $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$:

$$A = |3 \times 2 - 1 \times 1| = 5$$

b) $\det M = 6 - 1 = 5$: l'aire est **multipliée** par $|\det M|$.

c) Le disque unité (aire π) devient une **ellipse** d'aire 5π : le facteur $|\det M|$ vaut pour toute surface (on la découpe en petits carrés).

d) $\det M = 0$: les colonnes sont colinéaires, l'image du plan est une droite (ou un point) : les surfaces sont **écrasées** sur une droite, d'aire nulle.

— **Exemple** : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ envoie tout le plan sur la droite $y = 2x$. C'est la traduction géométrique de « non inversible ».

Réponse. Aire du parallélogramme = $|\det M| = 5$; ellipse d'aire 5π ; $\det = 0$: aplatissement sur une droite.

Correction de l'exercice 7 - Code correcteur de Hamming

a) Ligne 1 : $c_1 + c_3 + c_5 + c_7 = 1 + 1 + 0 + 0 = 0$; ligne 2 : $c_2 + c_3 + c_6 + c_7 = 1 + 1 = 0$; ligne 3 : $c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 0$ ✓ (modulo 2).

b) Hr : ligne 1 : $1 + 1 + 1 + 0 = 3 \equiv 1$; ligne 2 : $1 + 1 + 0 + 0 = 0$; ligne 3 : $0 + 1 + 0 + 0 = 1$.

$$Hr = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Linéarité : $Hr = Hc + He_j = 0 + (\text{colonne } j)$. Le syndrome $(1, 0, 1)$ est l'écriture binaire de $1 + 4 = 5$: l'erreur est en **position 5**.

— On corrige en changeant le 5^e bit : $c = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \checkmark$ (le mot de a)).

d) Les 7 colonnes de H sont **distinctes et non nulles** : chaque erreur unique donne un syndrome différent, identifiable. Avec deux erreurs, $Hr = C_i + C_j$, qui est aussi une colonne C_k (par exemple $C_1 + C_2 = C_3$) : le décodeur « corrige » la mauvaise position.

— C'est le code utilisé dans certaines mémoires d'ordinateur (ECC).

Réponse. $Hc = 0$; syndrome $(1, 0, 1) = \text{position 5}$; mot corrigé $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Correction de l'exercice 8 - Ruine du joueur

a) Depuis 1 : vers 2 avec proba $\frac{1}{2}$, vers 0 avec $\frac{1}{2}$; depuis 2 : vers 1 avec $\frac{1}{2}$, vers 3 avec $\frac{1}{2}$.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{colonnes : 0, 3})$$

b) $I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \det = \frac{3}{4} :$

— $N = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$

c) Depuis 1 € : $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$ parties en moyenne (de même depuis 2 €).

d) $B = NR = \frac{1}{2}N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$: depuis 1 €, ruine avec probabilité $\frac{2}{3}$, objectif atteint avec $\frac{1}{3}$.

— **Contrôle** : jeu équitable, la fortune moyenne finale doit égaler la fortune initiale : $0 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 1 \checkmark$

Réponse. $N = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$; durée moyenne 2 ; ruine depuis 1 € : $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Masses et ressorts

a) Sur la masse 1 : le ressort de gauche exerce $-kx_1$, celui du milieu $k(x_2 - x_1)$. Bilan : $-2kx_1 + kx_2 + f_1 = 0$, soit $2kx_1 - kx_2 = f_1$. De même pour la masse 2.

b) $\det K = 4k^2 - k^2 = 3k^2 = 30\,000 :$

$$K^{-1} = \frac{1}{3k^2} \begin{pmatrix} 2k & k \\ k & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{150} & \frac{1}{300} \\ \frac{1}{300} & \frac{1}{150} \end{pmatrix}$$

— $x_1 = \frac{10}{150} + \frac{20}{300} = \frac{2}{15} \approx 0,133 \text{ m} ; x_2 = \frac{10}{300} + \frac{20}{150} = \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ m}.$

c) $2kx_1 - kx_2 = 200 \times \frac{2}{15} - 100 \times \frac{1}{6} = \frac{80}{3} - \frac{50}{3} = 10 \text{ N} = f_1 \checkmark$

d) $(K^{-1})_{12} = \frac{1}{300}$ m/N est le déplacement de la masse 1 causé par une force de 1 N sur la masse 2 (**coefficient d'influence**). La symétrie de K^{-1} traduit le théorème de **réciprocité** de Maxwell.

Réponse. $K^{-1} = \begin{pmatrix} 1/150 & 1/300 \\ 1/300 & 1/150 \end{pmatrix}$; $x_1 = \frac{2}{15}$ m, $x_2 = \frac{1}{6}$ m.

Correction de l'exercice 10 - Matrice de covariance

a) Moyennes : $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 4$. Données centrées : $(-1, -2)$, $(0, -1)$, $(1, 3)$.

b) $Y^T Y = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 2+0+3 \\ 5 & 4+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$, donc

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

— $c_{11} = \frac{2}{3}$ et $c_{22} = \frac{14}{3}$ sont les **variances**; $c_{12} = \frac{5}{3}$ est la **covariance** (positive : les deux grandeurs varient dans le même sens).

c) $C^T = \frac{1}{3} Y^T Y = C$; $u^T C u = \frac{1}{3} \|Y u\|^2 \geq 0$ (plaquette 2).

d) $\rho = \frac{5/3}{\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{14}{3}}} = \frac{5}{\sqrt{28}} \approx 0,945$: forte corrélation positive.

— **Portée** : diagonaliser C (analyse en composantes principales) donne les directions de plus grande dispersion des données.

Réponse. $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$; corrélation $\frac{5}{\sqrt{28}} \approx 0,945$.

Correction de l'exercice 11 - Classement de pages web

a) Colonne 1 : $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; colonne 2 : $(0, 0, 1)$; colonne 3 : $(1, 0, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $Mr = r$: $r_1 = r_3$, $r_2 = \frac{1}{2}r_1$, $r_3 = \frac{1}{2}r_1 + r_2$ (cohérent). Avec la normalisation : $r_1 + \frac{1}{2}r_1 + r_1 = 1$, $r_1 = \frac{2}{5}$.

— $r = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (confirmé par échelonnement exact).

c) Pages 1 et 3 ex æquo ($\frac{2}{5}$). La page 3 reçoit deux liens, mais celui de la page 1 ne transmet que **la moitié** de son score ; la page 1, elle, reçoit **tout** le score de la page 3. Le score dépend de l'importance des pages qui pointent, pas seulement du nombre de liens : c'est l'idée de **PageRank**.

d) Colonnes : $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $0 + 0 + 1 = 1$, $1 + 0 + 0 = 1$. Donc $(1, 1, 1)(M - I) = 0$: les lignes de $M - I$ sont liées, $M - I$ n'est pas inversible, ce qui garantit une solution non nulle à $Mr = r$.

Réponse. $r = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$; pages 1 et 3 ex æquo.

Correction de l'exercice 12 - Exponentiation rapide

a) 99 produits.

b) $100 = 64 + 32 + 4 = (1100100)_2$. Six élévations au carré donnent $A^2, A^4, \dots, A^{64}$; puis deux produits : $A^{64} \times A^{32} \times A^4$.

$$A^{100} = A^{64} A^{32} A^4 \implies 6 + 2 = 8 \text{ produits}$$

— En général : environ $2 \log_2 n$ produits au lieu de $n - 1$.

c) $99 \times 2 \times 10^6 \approx 2 \times 10^8$ opérations contre $8 \times 2 \times 10^6 = 1,6 \times 10^7$: **environ 12 fois** moins.

d) $F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, F^8 = \begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}; 12 = 8 + 4 :$

— $F^{12} = F^8 F^4 = \begin{pmatrix} 170 + 63 & 102 + 42 \\ 105 + 39 & 63 + 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233 & 144 \\ 144 & 89 \end{pmatrix}.$

— D'après la plaquette 3, $F^{12} = \begin{pmatrix} F_{13} & F_{12} \\ F_{12} & F_{11} \end{pmatrix} : F_{12} = 144 \checkmark$ (4 produits : trois carrés et un produit, au lieu de 11).

Réponse. 99 produits naïfs contre 8 ; $F^{12} = \begin{pmatrix} 233 & 144 \\ 144 & 89 \end{pmatrix}, F_{12} = 144.$

Correction de l'exercice 13 - Transformations successives d'une image

a) $H = 2I_2, R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$ « H puis R puis S » s'écrit $M = SRH :$

$$M = SRH = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\det M = \det S \det R \det H = (-1) \times 1 \times 4 = -4$: les aires sont **multipliées par 4**, l'orientation est **renversée** (signe $-$).

c) $M^{-1} = H^{-1} R^{-1} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

— **Contrôle** : $MM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$

d) $M(1, 2) = (-4, -2).$

— Pas à pas : $(1, 2) \xrightarrow{H} (2, 4) \xrightarrow{R} (-4, 2) \xrightarrow{S} (-4, -2) \checkmark$

Réponse. $M = SRH = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \det M = -4 ; M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; (1, 2) \mapsto (-4, -2).$

Correction de l'exercice 14 - Équilibre d'un réseau de températures

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ;$ sommes des lignes : 1, 1, 1 $\checkmark$

b) $A(c, c, c)^T = (c, c, c)^T$ car chaque ligne somme à 1.

c) Jour 1 : (15, 10, 5) ; jour 2 : (12, 5; 10; 7, 5).

— Les températures se **rapprochent** de 10.

d) $w = (1, 2, 1)$ vérifie $wA = w$: colonne 1 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$; colonne 2 : $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$; colonne 3 : $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ✓ Donc $wT = wAT = wT$: conservé.

$$T_1 + 2T_2 + T_3 = 20 + 20 + 0 = 40$$

— À l'équilibre (c, c, c) : $4c = 40$, $c = 10$ °C. **Contrôle** au jour 2 : $12,5 + 20 + 7,5 = 40$ ✓

Réponse. $T_1 = (15, 10, 5)$, $T_2 = (12,5; 10; 7,5)$; $T_1 + 2T_2 + T_3 = 40$ conservé ; équilibre 10 °C.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : population et nombre d'or

a) $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 :$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

— $\varphi \approx 1,618$ (nombre d'or) et $\psi \approx -0,618$.

b) $(L - \varphi I)V = 0$: $(1 - \varphi)x + 2y = 0$, donc $x = \frac{2y}{\varphi - 1} = 2\varphi y$ (car $\varphi(\varphi - 1) = 1$). Vecteur propre : $(2\varphi, 1) \approx (3,236; 1)$.

c) $X_1 = (10 + 20, 5) = (30, 5)$; $X_2 = (40, 15)$; $X_3 = (70, 20)$.

— Rapports $\frac{j_n}{a_n}$: 1 ; 6 ; 2,67 ; 3,5 ; ... et au rang 6, $\frac{290}{90} \approx 3,22$ (calcul exact). Ils tendent vers $2\varphi \approx 3,236$, la proportion du vecteur propre.

d) On écrit $X_0 = \alpha V_\varphi + \beta V_\psi$; alors $X_n = \alpha \varphi^n V_\varphi + \beta \psi^n V_\psi$. Comme $|\psi| < 1 < \varphi$, le second terme devient négligeable :

— $X_n \approx \alpha \varphi^n V_\varphi$: la structure d'âge se stabilise (proportions de V_φ) et chaque classe est multipliée par $\varphi \approx 1,618$ par an.

— **Lien** : les jeunes vérifient $j_{n+2} = j_{n+1} + j_n$ (car $j_{n+2} = j_{n+1} + 2a_{n+1} = j_{n+1} + j_n$) : c'est la **récurrence de Fibonacci**, d'où le nombre d'or.

Réponse. Valeurs propres $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $j_n / a_n \rightarrow 2\varphi \approx 3,236$; croissance annuelle $\varphi \approx 1,618$.