

Plaquette 1 - Produit, inverse, rang et puissances de matrices

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Opérations.

- **Produit** : $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ — défini si le nombre de **colonnes** de A égale le nombre de **lignes** de B .
- Associatif et distributif, mais **non commutatif** : en général $AB \neq BA$.
- **Diviseurs de zéro** : $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ ou $B = 0$.
- **Transposée** : $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ et $(AB)^T = B^T A^T$ (**l'ordre s'inverse**).
- **Binôme de Newton** : $(A + B)^n = \sum_k \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ **seulement si** $AB = BA$.

Inversibilité.

- $A \in M_n$ est inversible s'il existe B avec $AB = BA = I_n$; en dimension finie, $AB = I_n$ **suffit**.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **Cas** 2×2 : si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- **Gauss-Jordan** : on échelonne $(A | I)$ jusqu'à $(I | A^{-1})$.
- **Polynôme annulateur** : si $A^2 = A + 2I$, alors $A(A - I) = 2I$ donc $A^{-1} = \frac{A - I}{2}$.
- **Équivalences** : A inversible $\Leftrightarrow \text{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow AX = 0$ n'a que la solution nulle.

Rang. Nombre de **pivots** après échelonnement ; invariant par opérations élémentaires, et $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$.

Matrices particulières : diagonale, triangulaire, symétrique ($A^T = A$), **nilpotente** ($A^p = 0$) — et alors $I - A$ est inversible d'inverse $I + A + \dots + A^{p-1}$.

Correction de l'exercice 1 - Produit matriciel

Calcul de AB (ligne de A par colonne de B) :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 2 + 3 \times 1 & 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcul de BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 & 2 \times 2 + 0 \\ 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- $AB \neq BA$: le produit matriciel n'est **pas commutatif**.
- **Contrôle par les traces** : $\text{tr}(AB) = 4 + 3 = 7$ et $\text{tr}(BA) = 2 + 5 = 7$ ✓ — les traces coïncident **toujours**, même quand les produits diffèrent.

- **Contrôle par les déterminants** : $\det A = 3$, $\det B = 2$, donc $\det(AB) = \det(BA) = 6 \checkmark$ ($4 \times 3 - 2 \times 3 = 6$ et $10 - 4 = 6$).

Réponse. $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 - Diviseurs de zéro

- **Exemple** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Produit** : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors que ni A ni B n'est nulle $\checkmark$
- **Autre exemple** : $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne $A^2 = 0$ — une matrice **nilpotente** non nulle.
- **Conséquence importante** : on ne peut **pas simplifier** dans une égalité matricielle. De $AB = AC$, on ne déduit $B = C$ que si A est **inversible**.
- **Lien avec l'inversibilité** : si A était inversible, $AB = 0$ donnerait $B = A^{-1} \times 0 = 0$. Les diviseurs de zéro sont donc **non inversibles**.
- **Contrôle** : $\det A = 0$ dans les deux exemples $\checkmark$

Réponse. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Correction de l'exercice 3 - Inverse d'une matrice 2x2

- **Déterminant** : $4 \times 2 - 7 \times 1 = 1 \neq 0$, donc A est **inversible**.
- **Formule** : on échange les termes diagonaux, on change le signe des autres, on divise par le déterminant.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 8 - 7 & -28 + 28 \\ 2 - 2 & -7 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\checkmark$

- **Contrôle du déterminant** : $\det(A^{-1}) = 8 - 7 = 1 = \frac{1}{\det A} \checkmark$

- **Application** : le système $4x + 7y = 1$, $x + 2y = 0$ a pour solution $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 - Inversion par Gauss-Jordan

La matrice est **triangulaire supérieure** à diagonale de 1 : elle est inversible.

Méthode nilpotente. Posons $A = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

- **Inverse** : $(I + N)^{-1} = I - N + N^2$, car $(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Vérification de la première ligne** : $(1, -2, 6)$ contre les colonnes de A donne 1, $2 - 2 = 0$, $-6 + 6 = 0$ ✓
- **Par Gauss-Jordan** : on éliminerait le 3 ($L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$) puis le 2 ($L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$) — même résultat, en deux opérations.
- **Contrôle** : $\det A = 1$, donc $\det A^{-1} = 1$ ✓

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 - Rang d'une matrice

Échelonnement.

- $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$: $(0, -3, -6)$.
- $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$: $(0, -6, -12)$.
- $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$: $(0, 0, 0)$ — la ligne s'annule.
- **Matrice échelonnée** : deux lignes non nulles, donc $\text{rg}(A) = 2$.
- **Conséquence** : A n'est **pas inversible**, et $\det A = 0$.
- **Relation de dépendance** : $L_1 + L_3 = 2L_2$ (soit $(8, 10, 12) = 2 \times (4, 5, 6)$) ✓ — les lignes sont en **progression arithmétique**.
- **Noyau** : le système $AX = 0$ a pour solutions $t(1, -2, 1)$, de dimension $3 - 2 = 1$ ✓
- **Contrôle** : $1 - 4 + 3 = 0$, $4 - 10 + 6 = 0$, $7 - 16 + 9 = 0$ ✓

Réponse. $\text{rg}(A) = 2$; A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 6 - Puissances par récurrence

- **Premières puissances** : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Conjecture** : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Récurrence** : vrai pour $n = 1$; et

$$A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓
- **Par le binôme** : $A = I + N$ avec $N^2 = 0$, et I commute avec N , donc $A^n = I + nN$ — même résultat, immédiatement.
- **Inverse** : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$, cohérent avec la formule pour $n = -1$.
- **Interprétation géométrique** : A est une **transvection** (cisaillement) ; l'itérer n fois multiplie le cisaillement par n .

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 - Puissances par le binôme

- **Décomposition** : $A = 3I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $N^2 = 0$.
- **Commutation** : $3I$ est **scalaire**, donc commute avec N — le **binôme de Newton** s'applique.

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3I)^{n-k} N^k = 3^n I + n 3^{n-1} N$$

- Tous les termes $k \geq 2$ sont nuls.

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

- **Contrôle** pour $n = 2$: $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, et le produit direct $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3+3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \checkmark$
- **Pour** $n = 3$: $\begin{pmatrix} 27 & 27 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \checkmark$
- **Condition cruciale** : sans la commutation, le binôme serait **faux** — c'est l'erreur la plus fréquente sur ce type d'exercice.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 - Polynôme annulateur

- **Calcul** : $A^2 = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- **Membre de droite** : $4A - 3I = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \checkmark$ — **égalité vérifiée**.
- **Inverse** : de $A^2 - 4A = -3I$, on tire $A(4I - A) = 3I$, donc

$$A^{-1} = \frac{4I - A}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Vérification par la formule** 2×2 : $\det A = 3$, donc $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$
- **Origine de la relation** : c'est le **théorème de Cayley-Hamilton**, $\chi_A = X^2 - 4X + 3$ (trace 4, déterminant 3).
- **Portée** : un polynôme annulateur à terme constant non nul donne toujours l'inverse comme **polynôme en A**.

Réponse. $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 9 - Transposée et symétrie

- **Transposée** : $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
- **Partie symétrique** :

$$S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Partie antisymétrique** :

$$N = \frac{A - A^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Vérifications** : $S^T = S$ ✓ ; $N^T = -N$ ✓ ; $S + N = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$ ✓
- **Unicité** : cette décomposition est **unique** — les espaces S_n et A_n sont **supplémentaires** dans M_n .
- **Dimensions** : $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$, de somme n^2 ✓

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 - Résolution matricielle d'un système

- **Écriture** : $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- **Inverse** (calculé plus haut) : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
- **Solution** :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \times 2 - 7 \times 1 \\ -1 \times 2 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Vérifications** : $-12 + 14 = 2$ ✓ et $-3 + 4 = 1$ ✓
- **Quand cette méthode est rentable** : si l'on doit résoudre **plusieurs** systèmes de même matrice A avec des seconds membres différents, le calcul de A^{-1} est amorti.
- **Sinon** : pour un système unique, le **pivot de Gauss** demande moins d'opérations.

Réponse. $(x, y) = (-3, 2)$.

Correction de l'exercice 11 - Matrices qui commutent

Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- $DM = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ et $MD = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$.
- **Identification** : $b = 2b$ donne $b = 0$; $2c = c$ donne $c = 0$; les coefficients diagonaux sont libres.
- **Solutions** : les matrices **diagonales** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.
- **Dimension du commutant** : 2.
- **Explication** : les deux valeurs propres de D étant **distinctes**, seules les matrices diagonales dans la même base commutent avec elle.
- **Contraste** : le commutant de I (valeur propre double) est $M_2(\mathbb{R})$ **tout entier**, de dimension 4 — plus la matrice a de valeurs propres distinctes, plus son commutant est petit.

Réponse. Exactement les matrices diagonales $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 - Trace

Égalité des traces.

$$\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA)$$

— L'interversion des deux sommes **finies** est licite.

Conséquence. Supposons $AB - BA = I_n$.

— En prenant la trace : $\text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(I_n) = n$.

— Or le membre de gauche est **nul**.

— Donc $n = 0$: **impossible** pour $n \geq 1$.

— **Conclusion** : aucune paire de matrices ne vérifie cette relation.

— **Remarque** : en **dimension infinie**, la relation $AB - BA = I$ existe (opérateurs de dérivation et de multiplication) — c'est l'absence de trace qui l'autorise. Cette relation est au cœur de la mécanique quantique.

Réponse. Double somme symétrique ; puis la trace donnerait $0 = n$.

Correction de l'exercice 13 - Matrice nilpotente et inverse de $I - N$

a) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (seul le coefficient $(1, 3)$ survit : $1 \times 3 = 3$), puis $N^3 = N^2 N = 0$.

b) On développe ; I_3 commute avec N , et les termes se télescopent comme pour $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$:

$$(I_3 - N)(I_3 + N + N^2) = I_3 + N + N^2 - N - N^2 - N^3 = I_3 - N^3$$

c) Comme $N^3 = 0$, le produit vaut I_3 : $I_3 - N$ est inversible et

$$(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $I_3 - N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire ; Gauss-Jordan (remontées : $L_2 + 3L_3$, puis

$L_1 + 2L_3 + L_2$) redonne la même matrice (calcul exact).

— **Analogie** : c'est la série géométrique $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, qui s'arrête ici car $N^3 = 0$.

Réponse. $N^3 = 0$; $(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 - Produit de matrices triangulaires

a) Ligne par colonne :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

— Par exemple $(AB)_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 0 = 7$ et $(AB)_{13} = 0 + 2 - 3 = -1$.

b) $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$. Pour $i > j$: si $k < i$, $a_{ik} = 0$; si $k \geq i > j$, $b_{kj} = 0$. Tous les termes sont nuls.

c) $(AB)_{ii} = \sum_k a_{ik} b_{ki}$: seul $k = i$ donne un terme non nul ($a_{ik} = 0$ pour $k < i$ et $b_{ki} = 0$ pour $k > i$), soit $a_{ii} b_{ii}$.

— **Contrôle** en a) : $1 \times 2 = 2$, $4 \times 3 = 12$, $6 \times (-1) = -6$ ✓

d) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses **coefficients diagonaux sont tous non nuls** (ce sont ses pivots) ; son inverse est alors triangulaire, de diagonale formée des inverses.

Réponse. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; triangulaire, diagonale produit des diagonales.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : suites couplées

— **Forme matricielle** : $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, donc $X_n = A^n X_0$.

— **Astuce des combinaisons** : posons $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$.

— $s_{n+1} = 4u_n + 4v_n = 4s_n$: géométrique de raison 4, avec $s_0 = 1$, donc $s_n = 4^n$.

— $d_{n+1} = 3u_n + v_n - u_n - 3v_n = 2(u_n - v_n) = 2d_n$: géométrique de raison 2, avec $d_0 = 1$, donc $d_n = 2^n$.

— **Retour** :

$$u_n = \frac{4^n + 2^n}{2}, \quad v_n = \frac{4^n - 2^n}{2}$$

— **Vérifications** : $u_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $v_1 = 1$; directement, $u_1 = 3 + 0 = 3$ ✓ et $v_1 = 1 + 0 = 1$ ✓

— $u_2 = \frac{16+4}{2} = 10$ et $v_2 = 6$; directement, $3 \times 3 + 1 = 10$ ✓ et $3 + 3 = 6$ ✓

— **Lecture spectrale** : $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont les **vecteurs propres** de A , de valeurs propres 4 et 2 — le changement de variables était en réalité un passage en base propre.

Réponse. $u_n = \frac{4^n + 2^n}{2}$, $v_n = \frac{4^n - 2^n}{2}$.