

Plaquette 3 - Puissances de matrices et applications

Calcul matriciel — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Diagonalisation. Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$:

$$A^n = PD^nP^{-1}, \quad D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n), \quad \text{tr}(A^n) = \sum_i \lambda_i^n$$

- **Binôme** : si $AB = BA$, $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Avec $N^p = 0$, la somme s'arrête à $k = p - 1$.
- **Polynôme annulateur** : si $Q(A) = 0$ et $X^n = QS + R$, alors $A^n = R(A)$.
- **Rang 1** : $J^2 = (\text{tr} J)J$, donc $J^n = (\text{tr} J)^{n-1}J$.
- **Graphes** : si G est la matrice d'adjacence, $(G^n)_{ij}$ est le nombre de **chemins de longueur n** de i à j .
- **Exponentielle** d'une nilpotente : $\exp(tN) = \sum_{k < p} \frac{t^k N^k}{k!}$ (somme finie).

Correction de l'exercice 1 - Diagonaliser pour calculer une puissance

a) $\det P = 1 - 2 = -1$, donc $P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

— $AP = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (les colonnes de P sont multipliées par 2 et 3), puis

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A = PDP^{-1}$, donc $A^n = PD^nP^{-1}$ (les $P^{-1}P$ intermédiaires se simplifient) :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

c) $n = 0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$; $n = 1 : \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

— $n = 5 : 2 \times 243 - 32 = 454$; $64 - 486 = -422$; $243 - 32 = 211$; $64 - 243 = -179 \checkmark$

d) $\text{tr}(A^n) = \text{tr}(D^n) = 2^n + 3^n$; $n = 5 : 454 - 179 = 275 = 32 + 243 \checkmark$

Réponse. $D = \text{diag}(2, 3)$; $A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$; $\text{tr} A^n = 2^n + 3^n$.

Correction de l'exercice 2 - Binôme avec une nilpotente

a) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ décale d'un cran : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

b) $2I_3$ commute avec N : le binôme s'applique, et s'arrête à N^2 :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

$$- A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

c) $n = 5 : 2^5 = 32 ; 5 \times 16 = 80 ; \binom{5}{2} \times 2^3 = 10 \times 8 = 80 \checkmark$

d) Avec $n = -1 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (car $-1 \times 2^{-2} = -\frac{1}{4}$ et $(-1)(-2)2^{-4} = \frac{1}{8}$).

— **Vérification** : ligne 1 de A fois colonne 3 : $2 \times \frac{1}{8} + 1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 = 0 \checkmark$; ligne 1 fois colonne 2 : $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \checkmark$ La formule s'étend aux entiers négatifs (c'est $2^{-1}(I + N/2)^{-1}$ développé en série finie).

Réponse. $A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2$; valable aussi pour $n = -1$.

Correction de l'exercice 3 - La matrice de Fibonacci

a) $n = 1 : F = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} \checkmark$. Si c'est vrai au rang n :

$$F^{n+1} = F^n F = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

— **Contrôle** : $F^{10} = \begin{pmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{pmatrix} \checkmark$ ($F_{11} = 89, F_{10} = 55, F_9 = 34$).

b) $\det F = -1$, donc $\det(F^n) = (-1)^n$, et $\det F^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \checkmark$

c) Coefficient $(1, 2)$ de $F^m F^n$: ligne 1 de F^m fois colonne 2 de F^n :

$$- F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} = (F^{m+n})_{12} = F_{m+n}.$$

d) $m = n : F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_n F_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$.

— $n = 5 : F_{10} = 55$ et $F_5(F_6 + F_4) = 5 \times (8 + 3) = 55 \checkmark$

— **Intérêt** : ces formules de « doublement » calculent F_n en $\log_2 n$ étapes (algorithme d'exponentiation rapide).

Réponse. $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$; Cassini ; $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$; $F_{10} = 55$.

Correction de l'exercice 4 - Chemins dans un graphe

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $(G^2)_{ij} = \sum_k g_{ik} g_{kj}$: chaque terme vaut 1 exactement quand $i-k$ et $k-j$

sont des routes, c'est-à-dire pour chaque chemin $i \rightarrow k \rightarrow j$.

b) Calcul ligne par colonne :

$$G^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

— $(G^3)_{14} = 2$: deux chemins de longueur 3, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ et $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ✓

c) $(G^2)_{ii}$ compte les allers-retours $i \rightarrow k \rightarrow i$, c'est-à-dire le **degré** de i (nombre de routes) : 2, 3, 3, 2 ✓

d) $(G^3)_{ii}$ compte les chemins fermés de longueur 3 partant de i : ce sont les triangles contenant i , parcourus dans les 2 sens. Chaque triangle est compté 3 fois (un par sommet) $\times 2$ (sens) :

— $\frac{2+4+4+2}{6} = 2$ triangles : $\{1, 2, 3\}$ et $\{2, 3, 4\}$ ✓

Réponse. $(G^3)_{14} = 2$ chemins ; diagonale de $G^2 = \text{degrés}$; $\text{tr}(G^3)/6 = 2$ triangles.

Correction de l'exercice 5 - Matrice des uns

a) Chaque coefficient de J^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$: $J^2 = 3J$, puis $J^k = 3^{k-1}J$ par récurrence.

b) I_3 et J commutent :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \frac{(1+3)^n - 1}{3} J$$

— (On a utilisé $\sum_{k \geq 1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1$.)

c) $n = 3$: $\frac{64-1}{3} = 21$: diagonale $1 + 21 = 22$, ailleurs 21 ✓

d) $(I+J)(I-\frac{1}{4}J) = I+J-\frac{1}{4}J-\frac{1}{4}J^2 = I+\frac{3}{4}J-\frac{3}{4}J = I$ ✓

— Formule en $n = -1$: $\frac{4^{-1}-1}{3} = \frac{-3/4}{3} = -\frac{1}{4}$ ✓ Elle reste valable.

Réponse. $J^k = 3^{k-1}J$; $A^n = I_3 + \frac{4^n-1}{3}J$; $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}J$.

Correction de l'exercice 6 - Matrice symétrique 2×2

a) $J^2 = 2J$, donc $J^k = 2^{k-1}J$ ($k \geq 1$). Binôme ($2I$ et J commutent) :

$$M^n = 2^n I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 2^{k-1} J = 2^n I_2 + \frac{4^n - 2^n}{2} J$$

— (Car $\sum_{k \geq 1} \binom{n}{k} 2^{n-k} 2^k = 4^n - 2^n$.)

b) $n = 4$: $16 + \frac{256-16}{2} = 16 + 120 = 136$ et hors diagonale 120 ✓

c) $M(1, 1) = (4, 4)$ et $M(1, -1) = (2, -2)$: valeurs propres 4 et 2. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}P$:

— $M^n = P \text{diag}(4^n, 2^n) P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$ ✓ (même résultat).

d) $\frac{M^n}{4^n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2^{-n} & 1 - 2^{-n} \\ 1 - 2^{-n} & 1 + 2^{-n} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}J$: la plus grande valeur propre **domine** ; la limite est

le projecteur sur la direction $(1, 1)$.

Réponse. $M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$; $M^n / 4^n \rightarrow \frac{1}{2}J$.

Correction de l'exercice 7 - Puissances d'une matrice de transition

a) Chaque ligne de Q somme à 1 et les lignes de L valent $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$: $QL = L$. Et $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})Q = (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{1}{2}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$: $LQ = L$. $L^2 = L$ (même calcul).

b) $L + \frac{1}{4}(I - L) = \frac{3}{4}L + \frac{1}{4}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = Q$ ✓ ; $L(I - L) = L - L^2 = 0$.

c) L et $I - L$ sont deux projecteurs de produit nul qui commutent : $(aL + b(I - L))^n = a^n L + b^n (I - L)$ (le binôme ne garde que les termes purs). Avec $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$:

$$Q^n = L + \frac{1}{4^n}(I_2 - L)$$

— $n = 3$: coefficient $(1, 1)$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{64} \times \frac{2}{3} = \frac{32+1}{96} = \frac{11}{32}$ ✓ ; $(2, 1)$: $\frac{1}{3} - \frac{1}{64} \times \frac{1}{3} = \frac{63}{192} = \frac{21}{64}$ ✓

d) $Q^n \rightarrow L$: quel que soit l'état initial, la loi à l'étape n tend vers $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, la **loi stationnaire**. L'écart décroît comme 4^{-n} .

Réponse. $Q^n = L + 4^{-n}(I_2 - L) \rightarrow L$; loi limite $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Correction de l'exercice 8 - Exponentielle d'une matrice nilpotente

a) $E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (car $N^2 = E_{13}$ et $N^3 = 0$).

b) N commute avec lui-même ; on développe en ne gardant que les puissances < 3 :

$$E(s)E(t) = I + (s+t)N + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)N^2 = I + (s+t)N + \frac{(s+t)^2}{2}N^2 = E(s+t)$$

c) $E(t)E(-t) = E(0) = I_3$.

d) Dérivée coefficient par coefficient : $E'(t) = N + tN^2 = N\left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right) = NE(t)$ (car $N^3 = 0$). Donc $X' = NE(t)X_0 = NX$.

— Le système $x' = y$, $y' = z$, $z' = 0$ s'écrit $X' = NX$. Solution :

$$X(t) = E(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 \\ 2 + 3t \\ 3 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $x' = 2 + 3t = y$ ✓ ; $y' = 3 = z$ ✓ ; $z' = 0$ ✓

Réponse. $E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E(s)E(t) = E(s+t)$; $X(t) = (1 + 2t + \frac{3}{2}t^2, 2 + 3t, 3)$.

Correction de l'exercice 9 - Une matrice non diagonalisable

a) $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $N^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = 0$ ✓

b) Binôme, arrêté à N :

$$A^n = 2^n I_2 + n 2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n - n 2^{n-1} & n 2^{n-1} \\ -n 2^{n-1} & 2^n + n 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

c) $n = 3$: $8 - 12 = -4$, 12 , -12 , $8 + 12 = 20$ ✓

d) On aurait $(D - 2I)^2 = P^{-1}(A - 2I)^2 P = 0$. Une diagonale de carré nul est nulle : $D = 2I$, puis $A = P(2I)P^{-1} = 2I$, ce qui est faux.

— A n'est **pas diagonalisable** ; le facteur n dans $n 2^{n-1}$ (croissance « polynôme fois exponentielle ») en est la signature.

Réponse. $A = 2I + N$, $N^2 = 0$; $A^n = 2^n I + n 2^{n-1} N$; A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 10 - Puissances d'une triangulaire 2×2

a) $n = 1$: $b \frac{a-c}{a-c} = b$ ✓. Hérédité : le coefficient $(1, 2)$ de $T^{n+1} = T^n T$ vaut $a^n b + b \frac{a^n - c^n}{a-c} c$, et

$$a^n + \frac{(a^n - c^n)c}{a-c} = \frac{a^{n+1} - a^n c + a^n c - c^{n+1}}{a-c} = \frac{a^{n+1} - c^{n+1}}{a-c}$$

b) $\frac{a^n - c^n}{a-c} = a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1} \rightarrow n a^{n-1}$. Pour $a = c$: $T = aI + bE_{12}$, $E_{12}^2 = 0$, et le binôme donne $T^n = a^n I + n a^{n-1} b E_{12}$ ✓ (même limite).

c) $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$: coefficient $2 \times \frac{81-1}{2} = 80$: $T^4 = \begin{pmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $T^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $T^4 = \begin{pmatrix} 81 & 72+8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Réponse. $T^n = \begin{pmatrix} a^n & b \frac{a^n - c^n}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$; $T^4 = \begin{pmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 - Matrice de permutation circulaire

a) $CX = (z, x, y)^T$: les coordonnées **tourment** d'un cran. $C^2 X = (y, z, x)^T$, $C^3 X = X$: $C^3 = I_3$.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^3 = I_3$$

b) $C^n = I_3$, C ou C^2 selon que $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$. $C^{-1} = C^2 = C^T$ (matrice de permutation : orthogonale).

c) $I_3 + C + C^2$ a exactement un 1 par position (les trois matrices ont leurs 1 à des places disjointes) : c'est J .

d) $(I + C)^3 = I + 3C + 3C^2 + C^3 = 2I + 3C + 3C^2 = 2I + 3(J - I) = 3J - I$.

— Soit la matrice avec 2 sur la diagonale et 3 ailleurs. **Contrôle** : $I + C$ a des lignes de somme 2, donc $(I + C)^3$ a des lignes de somme $8 = 2 + 3 + 3$ ✓

Réponse. $C^3 = I_3$, $C^{-1} = C^2 = C^T$; $I + C + C^2 = J$; $(I + C)^3 = 3J - I_3$.

Correction de l'exercice 12 - Suite vectorielle affine

a) $(I_2 - A)L = B$ avec $I_2 - A = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ inversible :

$$L = \text{diag}\left(2, \frac{3}{2}\right)B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $Y_{n+1} = AX_n + B - (AL + B) = A(X_n - L) = AY_n$, donc $Y_n = A^n Y_0$ et $X_n = L + A^n(X_0 - L)$.

c) $A^n = \text{diag}(2^{-n}, 3^{-n})$ et $X_0 - L = (-2, -3)$:

— $X_n = \left(2 - 2^{1-n}, 3 - 3^{1-n}\right)$, qui tend vers $L = (2, 3)$ (les valeurs propres de A sont de module < 1).

d) Directement : $X_1 = B = (1, 2)$; $X_2 = AX_1 + B = \left(\frac{1}{2} + 1, \frac{2}{3} + 2\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)$.

— Formule : $n = 1 : (2 - 1, 3 - 1) = (1, 2) \checkmark$; $n = 2 : \left(2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right) \checkmark$

— **Méthode** : comme pour les suites arithmético-géométriques, on se ramène à une suite **géométrique** en soustrayant le point fixe.

Réponse. $L = (2, 3)$; $X_n = (2 - 2^{1-n}, 3 - 3^{1-n}) \rightarrow (2, 3)$.

Correction de l'exercice 13 - Puissances d'une symétrie combinée

a) $P^2 = \frac{I+2S+S^2}{4} = \frac{2I+2S}{4} = P$; de même $Q^2 = Q$; $PQ = \frac{I-S^2}{4} = 0$; $P + Q = I$.

b) Récurrence :

$$(aP + bQ)^{n+1} = (a^n P + b^n Q)(aP + bQ) = a^{n+1}P^2 + a^n b PQ + b^n a QP + b^{n+1}Q^2 = a^{n+1}P + b^{n+1}Q.$$

c) $I = P + Q$ et $S = P - Q$, donc $M = (\alpha + \beta)P + (\alpha - \beta)Q$:

$$M^n = (\alpha + \beta)^n P + (\alpha - \beta)^n Q$$

d) $\alpha = 3, \beta = 1$: $M^n = 4^n P + 2^n Q$ avec $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

— $M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix} \checkmark$ (même résultat).

— **Leçon** : une décomposition de I en projecteurs « orthogonaux » ($PQ = 0$) diagonalise le calcul des puissances.

Réponse. $(aP + bQ)^n = a^n P + b^n Q$; $M^n = (\alpha + \beta)^n P + (\alpha - \beta)^n Q$.

Correction de l'exercice 14 - Trace des puissances

a) On multiplie $A^2 = sA - pI$ par A^n : $A^{n+2} = sA^{n+1} - pA^n$; la trace est linéaire :

$$t_{n+2} = s t_{n+1} - p t_n$$

b) $t_0 = \text{tr}I_2 = 2, t_1 = s, t_2 = s^2 - 2p, t_3 = s(s^2 - 2p) - ps = s^3 - 3ps$.

c) $s = 5, p = 4 + 2 = 6$: $t_0 = 2, t_1 = 5, t_2 = 25 - 12 = 13, t_3 = 65 - 30 = 35, t_4 = 175 - 78 = 97, t_5 = 485 - 210 = 275$.

— $2^5 + 3^5 = 32 + 243 = 275 \checkmark$

d) λ, μ sont les racines de $X^2 - sX + p$; la suite $\lambda^n + \mu^n$ vérifie la même récurrence (chaque racine vérifie $r^{n+2} = sr^{n+1} - pr^n$) et les mêmes valeurs initiales (2 et $\lambda + \mu = s$) : elle est égale à t_n .

Réponse. $t_{n+2} = s t_{n+1} - p t_n$; $t_2 = s^2 - 2p, t_3 = s^3 - 3ps$; en c) $t_5 = 275 = 2^5 + 3^5$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : puissances par Cayley-Hamilton

a) $\text{tr}A = 5$, $\det A = 4 + 2 = 6$; Cayley-Hamilton : $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$ (on peut vérifier : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$ et $5A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$ ✓).

b) $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$; en évaluant $X^n = QS + R_n$ en 2 et 3 :

$$2a_n + b_n = 2^n, \quad 3a_n + b_n = 3^n \implies a_n = 3^n - 2^n, \quad b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

$$- A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2.$$

c) $n = 3$: $a_3 = 19$, $b_3 = 24 - 54 = -30$: $19A - 30I = \begin{pmatrix} -11 & 19 \\ -38 & 46 \end{pmatrix}$ ✓

d) $AV = 2V$: $(A - 2I)V = 0$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}V = 0$: $V = (1, 1)$. $AV = 3V$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}V = 0$: $V = (1, 2)$.

$$- P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^n = P \text{diag}(2^n, 3^n) P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}.$$

— $n = 3$: $16 - 27 = -11$, 19 , $16 - 54 = -38$, $54 - 8 = 46$ ✓ Les deux méthodes concordent.

Réponse. $A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2$; $A^3 = \begin{pmatrix} -11 & 19 \\ -38 & 46 \end{pmatrix}$.