

**Plaquette 2 - Structure du produit :**  
**commutation, trace, transposée**  
**Calcul matriciel — Licence 1 (L1)**  
 Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Produit.**  $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$  ; en général  $AB \neq BA$ .

- **Matrices élémentaires** :  $E_{ij}$  a un seul coefficient 1, en position  $(i, j)$  ;  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$  ( $\delta_{jk} = 1$  si  $j = k$ , 0 sinon).
- **Binôme** :  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$  ; il vaut  $A^2 + 2AB + B^2$  **seulement si**  $AB = BA$ .

**Trace et transposée.**

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad \text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

- **A symétrique** :  $A^T = A$  ; **antisymétrique** :  $A^T = -A$ . Toute matrice carrée s'écrit de façon unique  $A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$ .
- **Projecteur** :  $P^2 = P$  ; **symétrie** (involution) :  $S^2 = I$ .
- **Blocs** : on multiplie des matrices découpées en blocs compatibles comme des matrices  $2 \times 2$ , **en respectant l'ordre** des facteurs.
- **Rang 1** :  $A = UV^T$  ( $U, V$  colonnes non nulles) vérifie  $A^2 = (V^T U)A$ .

**Correction de l'exercice 1 - Matrices qui commutent avec une matrice donnée**

**a)**  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  (multiplier par  $B$  à droite **échange les colonnes**) et  $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  (à gauche, **échange les lignes**).  $AB \neq BA$ .

**b)**  $J = I_2 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $M$  commute avec  $J$  si et seulement si elle commute avec  $N$ . Avec  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad NM = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Égalité :  $c = 0$  et  $a = d$ . Donc  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 + bN$ .

**c)**  $(aI + bN) + (a'I + b'N) = (a + a')I + (b + b')N$  ;  $(aI + bN)(a'I + b'N) = aa'I + (ab' + ba')N$  car  $N^2 = 0$ . Même forme : stable.

**d)**  $J$  et  $M$  commutent, donc  $(J + M)^2 = J^2 + 2JM + M^2$ . Avec  $J + M = (1 + a)I + (1 + b)N$  :

—  $(J + M)^2 = (1 + a)^2 I + 2(1 + a)(1 + b)N$  (encore grâce à  $N^2 = 0$ ).

**Réponse.**  $AB \neq BA$  ; commutant de  $J$  : les  $aI_2 + bN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .

## Correction de l'exercice 2 - Commutant d'une matrice diagonale

a) Multiplier à gauche par une diagonale multiplie les **lignes**, à droite les **colonnes** :

$$(DM)_{ij} = d_i m_{ij}, \quad (MD)_{ij} = m_{ij} d_j$$

b)  $DM = MD \Leftrightarrow (d_i - d_j)m_{ij} = 0$  pour tous  $i, j$ . Pour  $i \neq j$ ,  $d_i \neq d_j$  (les coefficients 1, 2, 3 sont distincts), donc  $m_{ij} = 0$ .

— Les matrices qui commutent avec  $D$  sont exactement les matrices **diagonales**.

c)  $d_1 = d_2 = 1$  : la condition ne porte plus sur  $m_{12}$  et  $m_{21}$ . Les matrices qui commutent avec  $D'$  sont

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}$$

— (diagonales **par blocs**, un bloc  $2 \times 2$  quelconque et un bloc  $1 \times 1$ ).

d) Le commutant dépend des **valeurs répétées** : là où  $D'$  vaut 1 sur un plan, toute matrice agissant dans ce plan commute. Dimensions : 3 en b), 5 en c).

**Réponse.** Commutant de  $\text{diag}(1, 2, 3)$  : les diagonales ; de  $\text{diag}(1, 1, 3)$  : les diagonales par blocs ( $2 + 1$ ).

## Correction de l'exercice 3 - Trace et crochet $AB - BA$

a)  $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki}$  ;  $\text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}$ . Même double somme (finie) : égalité.

b)  $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$ , alors que  $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$ .

$$AB - BA = I_n \text{ est impossible}$$

— (Ce résultat est faux en dimension infinie : dérivation et multiplication par  $x$  vérifient  $DX - XD = \text{id}$ , ce qui est à la base de la mécanique quantique.)

c) Non. Avec  $A = E_{12}$ ,  $B = E_{21}$ ,  $C = E_{11}$  :  $ABC = E_{11}E_{11} = E_{11}$ , trace 1 ;  $BAC = E_{22}E_{11} = 0$ , trace 0.

— Seules les permutations **circulaires** conservent la trace :  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$ .

d)  $\text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A)$  : deux matrices **semblables** ont la même trace.

**Réponse.**  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  ;  $AB - BA = I_n$  impossible ; seulement les permutations circulaires ; trace invariante par similitude.

## Correction de l'exercice 4 - Transposée et forme quadratique

$$\text{a) } \left( (AB)^T \right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k \left( B^T \right)_{ik} \left( A^T \right)_{kj} = \left( B^T A^T \right)_{ij}.$$

— L'**ordre s'inverse**, comme pour l'inverse d'un produit.

b)  $\left( A^T A \right)^T = A^T \left( A^T \right)^T = A^T A$  : symétrique. Et

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_j \left( A^T A \right)_{jj} = \sum_j \sum_i a_{ij}^2$$

c) Si  $A^T A = 0$ , sa trace  $\sum a_{ij}^2$  est nulle : une somme de carrés de réels est nulle seulement si chacun l'est. Donc  $A = 0$ .

— **Faux sur  $\mathbb{C}$**  avec la transposée simple :  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$  donne  $AA^T = 1 + i^2 = 0$ .

**d)**  $X^T A^T A X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2 \geq 0$ .

— Si  $A^T A X = 0$ , alors  $\|AX\|^2 = X^T (A^T A X) = 0$ , donc  $AX = 0$ . Ainsi  $\ker(A^T A) = \ker A$  : c'est ce qui garantit que les **équations normales** des moindres carrés ont une solution unique quand les colonnes de  $A$  sont libres.

**Réponse.**  $(AB)^T = B^T A^T$  ;  $\text{tr}(A^T A) = \sum a_{ij}^2$  ;  $\ker(A^T A) = \ker A$ .

### Correction de l'exercice 5 - Partie symétrique et antisymétrique

**a) Analyse :** si  $M = S + T$ , alors  $M^T = S - T$ , d'où  $S = \frac{M + M^T}{2}$  et  $T = \frac{M - M^T}{2}$  : unicité.

**Synthèse :** ces deux matrices conviennent ( $S^T = S$ ,  $T^T = -T$ ,  $S + T = M$ ).

**b)** Calcul coefficient par coefficient :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle :**  $S + T$  redonne  $M$  (par exemple  $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$  et  $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$  ✓).

**c)**  $t_{ii} = -t_{ii}$ , donc  $t_{ii} = 0$ .

**d)**  $X^T T X$  est un réel, égal à sa transposée :  $X^T T^T X = -X^T T X$ . Il est donc nul.

— Ainsi  $X^T M X = X^T S X + 0$  : dans une **forme quadratique**, seule la partie symétrique compte (c'est pourquoi on suppose toujours la matrice symétrique).

**Réponse.**  $S = \frac{M + M^T}{2}$ ,  $T = \frac{M - M^T}{2}$  ;  $X^T T X = 0$  donc  $X^T M X = X^T S X$ .

### Correction de l'exercice 6 - Matrices élémentaires et centre

**a)**  $(E_{ij} E_{kl})_{ab} = \sum_c (E_{ij})_{ac} (E_{kl})_{cb}$  ; le terme est non nul seulement si  $a = i$ ,  $c = j$ ,  $c = k$ ,  $b = l$ . Il faut donc  $j = k$  :

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

**b)**  $E_{ij} M$  a pour  $i$ -ème ligne la  $j$ -ème ligne de  $M$  (autres lignes nulles) ;  $M E_{ij}$  a pour  $j$ -ème colonne la  $i$ -ème colonne de  $M$ .

**c)**  $M E_{ij} = E_{ij} M$  pour tous  $i, j$ . Coefficient  $(i, j)$  : à gauche  $m_{ii}$ , à droite  $m_{jj}$  :  $m_{ii} = m_{jj}$ .

— Coefficient  $(k, j)$  avec  $k \neq i$  : à gauche  $m_{ki}$ , à droite 0 (la matrice  $E_{ij} M$  n'a que sa ligne  $i$ ) :  $m_{ki} = 0$ .

—  $M$  est diagonale à coefficients égaux :  $M = \lambda I_n$  (réciproque évidente).

**d)** Par a) :  $E_{12} E_{21} = \delta_{22} E_{11} = E_{11}$  et  $E_{21} E_{12} = E_{22}$ . Au passage  $E_{12} E_{21} - E_{21} E_{12} = E_{11} - E_{22}$ , de trace nulle, conformément à l'exercice sur la trace.

**Réponse.**  $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$  ; seules les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices.

### Correction de l'exercice 7 - Calcul par blocs

**a)** Comme pour des matrices  $2 \times 2$ , en gardant l'ordre :

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AB + BD \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}$$

**b)** On vérifie le produit par blocs :

$$- \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & -BD^{-1} + BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = I_{p+q} \checkmark$$

**c)**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = I_2; D = \text{diag}(2, 1), D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, 1\right).$

$$- -A^{-1}BD^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle** (ligne 1 de  $M$  fois colonne 3 de  $M^{-1}$ ) :  $-\frac{1}{2} + 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 0 = 0 \checkmark$

**d)** Les blocs ne commutent pas en général ; les formats aussi imposent l'ordre :  $A^{-1}$  est  $p \times p$ ,  $B$  est  $p \times q$ ,  $D^{-1}$  est  $q \times q$  : seul le produit  $A^{-1}BD^{-1}$  a un sens.

**Réponse.**  $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AB + BD \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}; M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$

### Correction de l'exercice 8 - Projecteurs

**a)**  $P^2 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \checkmark$

**b)**  $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P \checkmark; P(I - P) = P - P^2 = 0.$

**c)**  $PX = (x + y, 0) : \ker P = \{x + y = 0\} = \text{Vect}(1, -1); PX = X \Leftrightarrow y = 0 : \text{c'est l'axe Vect}(1, 0).$

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(1, 0) \oplus \text{Vect}(1, -1), \quad X = PX + (I - P)X$$

—  $P$  est la **projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite**  $y = -x$  (pas une projection orthogonale).

**d)** Si  $P$  était inversible,  $P^2 = P$  donnerait  $P = P^{-1}P^2 = P^{-1}P = I$ . Donc un projecteur différent de  $I$  n'est **pas** inversible (il a un noyau non nul).

**Réponse.**  $P^2 = P; I - P$  projecteur,  $P(I - P) = 0$  ; projection sur  $\text{Vect}(1, 0)$  parallèlement à  $\text{Vect}(1, -1)$ .

### Correction de l'exercice 9 - Symétries et projecteurs associés

**a)**  $S^2 = I \checkmark; S(x, y) = (y, x) : \text{c'est la réflexion par rapport à la droite } y = x.$

**b)**  $P^2 = \frac{I + 2S + S^2}{4} = \frac{2I + 2S}{4} = P \checkmark; \text{et } 2P - I = S.$

$$S = 2P - I \Leftrightarrow P = \frac{I + S}{2}$$

**c)**  $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \text{projection orthogonale sur la droite } y = x (P(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1)).$

— **Géométrie** : le symétrique  $SX$  s'obtient en allant de  $X$  à son projeté  $PX$ , puis en continuant d'autant :  $SX = X + 2(PX - X) = 2PX - X.$

**d)**  $S \cdot S = I : S$  est inversible et  $S^{-1} = S.$

**Réponse.**  $S^2 = I$ ,  $P = \frac{I+S}{2}$  projecteur,  $S^{-1} = S$  ; ici projection orthogonale sur  $y = x$ .

### Correction de l'exercice 10 - Matrices de rotation

a) Produit :

$$R(\theta)R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & \dots \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi & \dots \end{pmatrix} = R(\theta + \varphi)$$

— (Formules d'addition ; la deuxième colonne se traite de même.) C'est l'analogue de  $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ .

b)  $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi) = R(\varphi)R(\theta)$  ;  $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I$  ; récurrence pour  $R(\theta)^n$ .

c)  $R(\theta)^\top = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(-\theta) = R(\theta)^{-1}$  :  $R(\theta)$  est **orthogonale**.

d)  $R\left(\frac{\pi}{6}\right)^{12} = R(2\pi) = I_2$ .

—  $R\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2026} = R\left(\frac{2026\pi}{3}\right)$  ;  $2026 = 6 \times 337 + 4$ , donc l'angle vaut  $\frac{4\pi}{3}$  modulo  $2\pi$  :

$$R\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2026} = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Réponse.**  $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$ ,  $R^{-1} = R^\top$  ;  $R(\pi/6)^{12} = I_2$  ;  $R(\pi/3)^{2026} = R(4\pi/3)$ .

### Correction de l'exercice 11 - Produit de matrices symétriques

a)  $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA$ . Donc  $AB$  symétrique  $\Leftrightarrow AB = BA$ .

b)  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$  :  $AB \neq BA$  et  $AB$  n'est pas symétrique ✓ (on note  $BA = (AB)^\top$ , comme prévu).

c)  $(AA^\top)^\top = AA^\top$  (idem pour  $A^\top A$ ).

— Avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  :  $AA^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  : différentes, mais de même trace 2 ✓

d) On transpose  $AA^{-1} = I$  :  $(A^{-1})^\top A^\top = I$ , soit  $(A^{-1})^\top A = I$ . Donc  $(A^{-1})^\top = A^{-1}$ .

$$(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$$

**Réponse.**  $AB$  symétrique  $\Leftrightarrow AB = BA$  ;  $AA^\top$ ,  $A^\top A$  symétriques (mais différentes) ;  $A^{-1}$  symétrique.

### Correction de l'exercice 12 - Matrices qui anticommulent

a)  $\sigma_1^2 = I$  (échanger deux fois) ;  $\sigma_3^2 = I$  ;

$$\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On lit  $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3$  ✓

c)  $(\sigma_1 + \sigma_3)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_3^2 = I + 0 + I = 2I$ .

— **Vérification** directe :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$  Les termes croisés se sont **annulés** :  
exemple frappant où l'identité  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  serait fausse.

**d)**  $\sigma_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $\sigma_2^2 = i^2(\sigma_1\sigma_3)^2 = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I$ .

— Les trois matrices de Pauli décrivent le **spin** de l'électron en mécanique quantique.

**Réponse.**  $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1$  ;  $(\sigma_1 + \sigma_3)^2 = 2I$  ;  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2^2 = I$ .

### Correction de l'exercice 13 - Équation $X^2 = 0$

**a)**  $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = 0$ .

**b)** Si  $a+d \neq 0$  :  $b=c=0$ , puis  $a^2=d^2=0$ , donc  $X=0$ . Sinon  $d=-a$ , et il reste  $a^2+bc=0$  (les deux coefficients diagonaux donnent la même équation).

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + bc = 0$$

**c)**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  ( $4+4 \times (-1) = 0$ ).

— **Vérification** du troisième :  $\begin{pmatrix} 4-4 & 8-8 \\ -2+2 & -4+4 \end{pmatrix} = 0 \checkmark$

**d)** Dans  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ . Dans  $M_2(\mathbb{R})$ , il y a une **infinité** de solutions non nulles : l'anneau des matrices n'est pas intègre. Toutes ces matrices sont de trace nulle et de rang  $\leq 1$ .

**Réponse.**  $X^2 = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ ,  $a^2 + bc = 0$  ; ex.  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 14 - Trace d'un projecteur de rang 1

**a)** Par associativité,  $V^T U$  est un **scalaire** :

$$P^2 = U(V^T U)V^T = 1 \cdot UV^T = P$$

**b)**  $\text{tr}(UV^T) = \text{tr}(V^T U) = 1$ . Toutes les colonnes de  $P$  sont des multiples de  $U$  (colonne  $j$  :  $v_j U$ ) et  $P \neq 0$  : rang 1. Pour un projecteur, **trace = rang**.

**c)**  $V^T U = 1 + 0 + 0 = 1 \checkmark$  ;  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

—  $(P^2)_{11} = 1 + 0 + 0 = 1 = P_{11} \checkmark$  ;  $(P^2)_{13} = 3 + 0 + 0 = 3 \checkmark$

**d)**  $PX = U(V^T X) = (V^T X)U$  : projection sur la droite  $\text{Vect}(U)$ , parallèlement au plan  $\{X : V^T X = 0\}$  (le noyau).

**Réponse.**  $P^2 = P$ ,  $\text{tr} P = \text{rg} P = 1$  ;  $PX = (V^T X)U$ .

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : puissances d'une matrice de rang 1

**a)**  $U = (1, 2, 3)^T$  :  $UU^T$  a pour coefficient  $(i, j)$  le produit  $u_i u_j \checkmark$  ;  $U^T U = 1 + 4 + 9 = 14$ .

**b)**  $A^2 = U(U^T U)U^T = 14A$  (confirmé :  $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 42 \\ \dots & & \end{pmatrix}$ ). Par récurrence :

$$A^n = 14^{n-1}A \quad (n \geq 1)$$

**c)**  $\text{tr}A = 1 + 4 + 9 = 14$  : le facteur est la trace, ce qui est général pour une matrice de rang 1 ( $A^2 = (\text{tr}A)A$ ).

**d)** On cherche  $(I + A)(I + \alpha A) = I + (1 + \alpha)A + \alpha A^2 = I + (1 + \alpha + 14\alpha)A$ .

— Il faut  $1 + 15\alpha = 0$ , soit  $\alpha = -\frac{1}{15}$  :  $(I_3 + A)^{-1} = I_3 - \frac{1}{15}A$ .

— **Contrôle** du coefficient  $(1, 1)$  de  $(I + A)\left(I - \frac{A}{15}\right)$  :

$$2 \times \frac{14}{15} + 2 \times \left(-\frac{2}{15}\right) + 3 \times \left(-\frac{3}{15}\right) = \frac{28 - 4 - 9}{15} = 1 \quad \checkmark$$

— **Formule de Sherman-Morrison** :  $(I + UV^T)^{-1} = I - \frac{UV^T}{1 + V^T U}$ .

**Réponse.**  $A = UU^T$ ,  $U^T U = 14$  ;  $A^n = 14^{n-1}A$  ;  $(I_3 + A)^{-1} = I_3 - \frac{A}{15}$ .